Langage de programmation C++

Principe fondamental de la dynamique : chute libre & contact élastique

Master 2 Génie Industriel - Industrie Numérique

INstitut Supérieur des Sciences Et Techniques (UPJV)

Pr Mohamed Guessasma

Septembre 2025

UNIVERSITÉ de Picardie Jules Verne CAMPUS universitaire de Saint-Quentin PÔLE TECHNOLOGIQUE

- Quand est-ce qu’on va toucher le sol ?
- Bientôt !
- ???

Plan

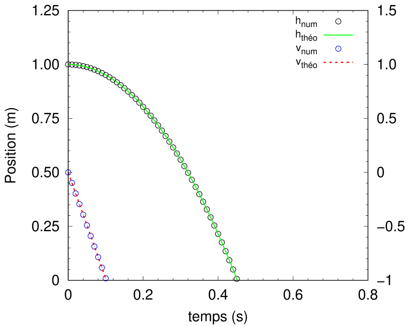
Modélisation de la chute verticale d'une sphère
- Sans résistance de l'air
- Avec résistance de l'air

Modélisation du contact sphère/plan
- Modélisation du contact sphère/plan
- Pas de temps critique

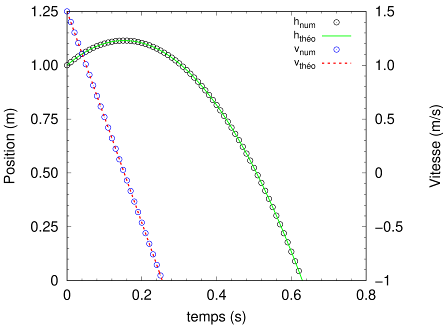
Modélisation de la chute libre d'un corps solide

Étude du mouvement d'une sphère soumise à l'accélération gravitationnelle $\vec{g}$:

$h_0 = 1\ m$; $D_b = 10^{-1}\ m$; $v_0 = [0 - 1.5]\ m/s$; $g = 9.81\ m/s^2$;
$\Delta t = 10^{-3} s$; $t_{total} = 1\ s$; $h(t) = -g\frac{t^2}{2} + v_0 t + h_0$; $v(t) = -gt + v_0$

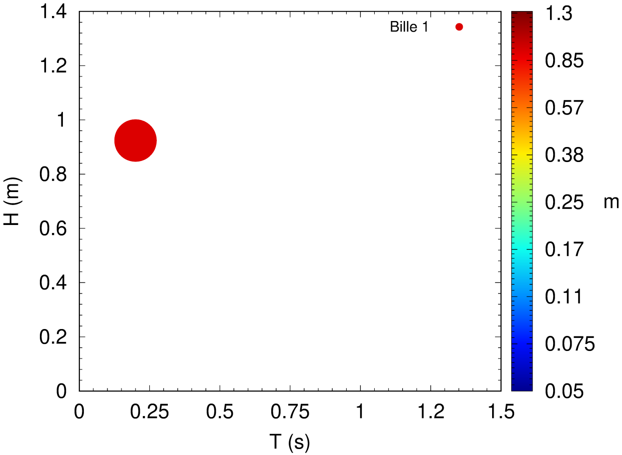


(a) $v_0 = 0\ m/s$



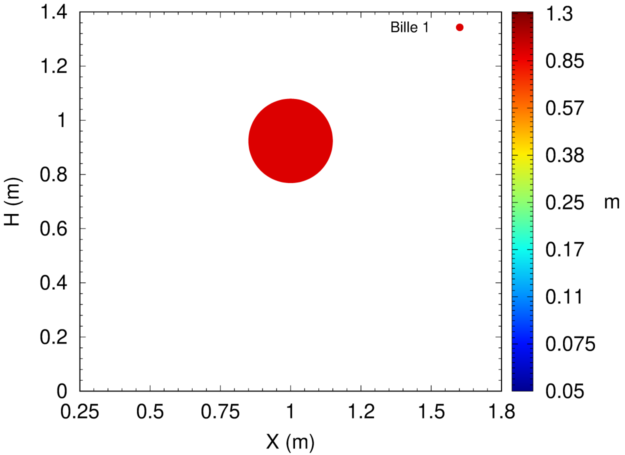
(b) $v_0 = 1.5\ m/s$

Animation cinématique (cliquez sur l'image)



Position : $H = f(t)$

Animation cinématique (cliquez sur l'image)

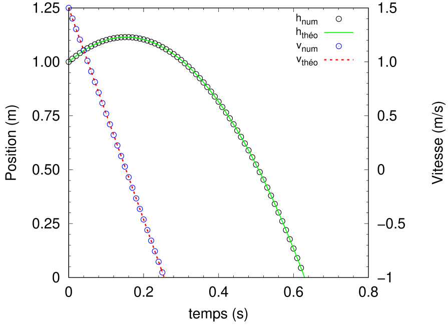


Position : $H = f(x)$

Modélisation de la chute libre d'un corps solide

Prise en compte d'un frottement constant : $\vec{f} = -\alpha \times sign(\vec{v})$, avec $\alpha > 0$ (nb. unité Newton).

$$v(t) = (-g + \frac{f}{m})t + v_0 \; ; \; h(t) = (-g + \frac{f}{m})\frac{t^2}{2} + v_0 t + h_0$$



(a) $v_0 = 1.5\ m/s$ & $\alpha = 0$

(b) $v_0 = 1.5\ m/s$ & $\alpha = 10$

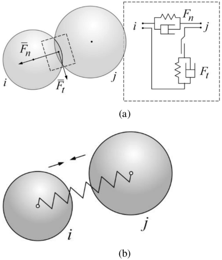
Plan

Modélisation de la chute verticale d'une sphère
- Sans résistance de l'air
- Avec résistance de l'air

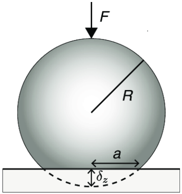
Modélisation du contact sphère/plan
- Modélisation du contact sphère/plan
- Pas de temps critique

Chute libre d'un corps solide avec contact

Étude du mouvement d'une sphère soumise à l'accélération gravitationnelle $\vec{g}$ avec prise en compte de l'interaction sphère/plan : $D_b = 10^{-1}\ m$; $\rho = 2700\ kg/m^3$; $m = \rho V$; $k_n = 10^4\ N/m$; $\alpha_e = 0.8$; $c_n = \sqrt{\frac{10}{3}\psi\sqrt{k_n m}}$; $\psi = ln\alpha_e/\sqrt{ln^2\alpha_e + \pi^2}$; $F_n = -k_n\delta_n - c_n v_n$ (si contact hertzien $\Longrightarrow k_n \propto \delta_n^{1/2}$)



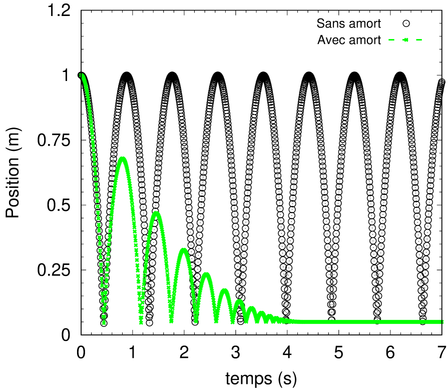
(a) Modèle de contact (Kelvin-Voigt)



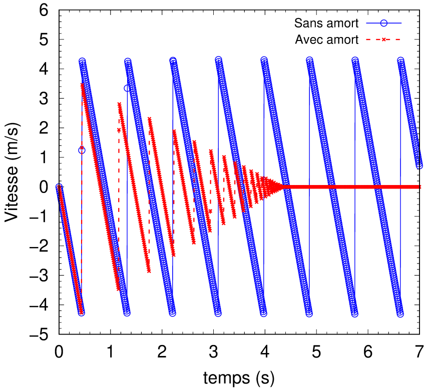
(b) Contact sphère/plan

Positions et vitesses avec et sans amortissement

Cas amorti avec une restitution $\alpha_e = 0.8$

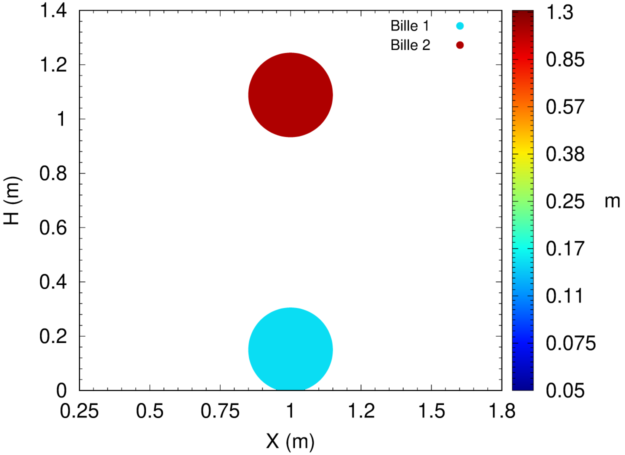


(a) Positions de la sphère : $h(t)$



(b) Vitesses de la sphère : $v(t)$

Animation cinématique (cliquez sur l'image)



Position : $H = f(x)$

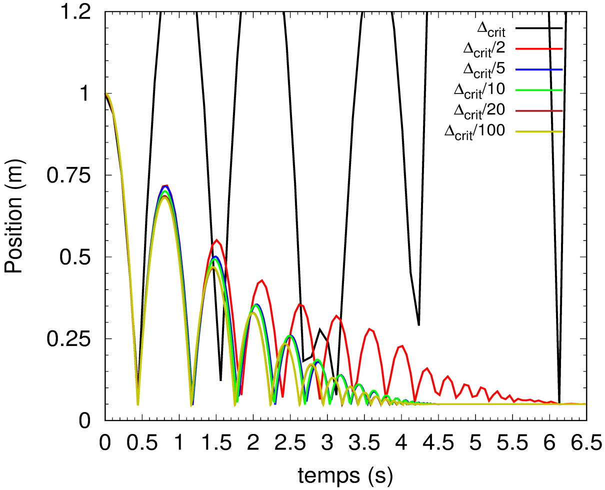
Pas de temps critique : systèmes dynamiques oscillatoires

Le pas de temps critique Δt_{crit} est calculé par rapport à la pulsation maximale d'oscillation ω_{max}. La détermination de ω_{max} nécessite un développement analytique plus élaboré. Afin de simplifier les calculs, on peut raisonnablement faire le choix de substituer à ω_{max} la pulsation propre $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

- Dans le cas non amorti, Δ_{crit} est donné par la relation suivante : $\Delta t_{crit} < \frac{2}{\omega}$.
- Dans le cas amorti, on a une réduction de Δt_{crit} : $\Delta t_{crit} < \frac{2}{\omega}\left(\sqrt{1+\zeta^2}-\zeta\right)$, $\zeta = \frac{c}{c_{crit}}$: rapport du coefficient d'amortissement par le coefficient d'amortissement critique $c_{crit} = 2\sqrt{k \times m}$

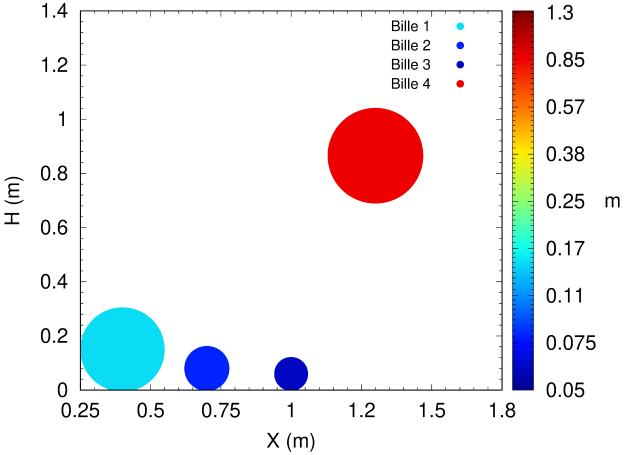
Il est admis de choisir un pas de temps tel que : $\Delta t < 0.5 \times \Delta t_{crit}$

Effet du pas de temps Δt



Sensibilité de la solution numérique au pas de temps

Animation cinématique (cliquez sur l'image)



Position : $H = f(x)$