# Éléments de Logique Formelle et du Raisonnement Mathématique : Examen

Stéphane Devismes

5 mai 2025
2 pages
Total : 90 points
Durée : 1h30

Documents autorisés : une feuille recto verso de notes manuscrites format A4.
Le barème est *indicatif*, les points correspondent au nombre de minutes nécessaires pour réaliser les exercices.
L'épreuve sera notée sur 90 points.
Le résultat d'une question peut être admis pour s'en servir dans la suite de l'énoncé.
Les exercices peuvent être traités dans l'ordre de votre choix à condition de les numéroter clairement.

**Exercice 1 (Résolution (30 points))** *Il existe en Écosse un club très fermé qui obéit aux règles suivantes :*

1. *Tout membre non écossais porte des chaussettes rouges.*
2. *Les membres mariés ne sortent pas le dimanche.*
3. *Un membre sort le dimanche si et seulement si il est écossais.*
4. *Tout membre qui porte un kilt est écossais et est marié.*
5. *Tout membre qui porte des chaussettes rouges porte un kilt.*
6. *Tout membre écossais porte un kilt.*

*Les règles de ce club concernent donc un membre éventuel du club, appelons le $x$.*

1. *Formulez chaque règle de cet énoncé en une formule qui utilise les atomes suivants (12 points) :*
   - *$e$ : $x$ est un membre écossais,*
   - *$k$ : $x$ porte un kilt,*
   - *$m$ : $x$ est marié,*
   - *$c$ : $x$ porte des chaussettes rouges,*
   - *$d$ : $x$ sort le dimanche.*
2. *Transformez les formules précédentes en un ensemble de clauses équivalent. (8 points)*
3. *Montrez* en donnant une preuve par résolution *que les règles de ce club sont si contraignantes qu'il ne peut accepter aucun membre. (10 points)*

□

**Exercice 2 (Résolution (10 points))** *Montrez par résolution que l'ensemble de formules suivant est insatisfaisable :*

$$\{\bar{q} + m, \bar{q} + \bar{m} + \bar{r}, \bar{q} + \bar{m} + r, \bar{p} + r, \bar{p} + \bar{r}, p + q\}$$

□

**Exercice 3 (Démonstration par récurrence, exercice de TD (14 points))**

*Soit $n$ un entier positif non nul. Soient $x_1, x_2, \ldots x_n$ et $y$ $n+1$ variables.*
*On s'intéresse à la formule $\neg(x_1 \Rightarrow x_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow x_n \Rightarrow y)$.*

1. *Rappeler quelle est la formule stricte (parenthésée) correspondant à cette formule. (2 points)*
2. *Démontrer par récurrence que $\neg(x_1 \Rightarrow x_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow x_n \Rightarrow y) \equiv x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n \wedge \neg y$. (12 points)*

□

**Exercice 4 (Formalisation (16 points))**
*Afin d'assurer que le prochain film de la franchise* Jurassic Park *sera à la fois scientifiquement correct et commercialement réussi, on fait appel à vos talents en logique formelle.*

*Vous utiliserez la signature suivante :*
— $V(x)$ *est vrai si* $x$ *est un visiteur*
— $D(x)$ *est vrai si* $x$ *est un dinosaure*
— $P(x)$ *est vrai si* $x$ *a peur*
— $M(x, y)$ *est vrai si* $x$ *mange* $y$

*Traduisez en formules de logique du premier ordre les affirmations suivantes (4 points par affirmation) :*

1. *Il y aura des dinosaures et des visiteurs, mais aucun dinosaure visiteur.*
2. *Si un dinosaure mange un visiteur, tous les* autres *visiteurs auront peur.*
3. *Tous les dinosaures ne sont pas des mangeurs de visiteurs.*
4. *Aucun dinosaure ne partage son repas avec qui que ce soit.*

□

**Exercice 5 (Expansions (20 points))**

1. (10 points) *À l'aide de la méthode des expansions, déterminer* ***un contre-modèle*** *de la formule*

$$\forall x \forall y (R(x, y) \wedge R(y, x) \Rightarrow R(x, x))$$

2. (10 points) *À l'aide de la méthode des expansions, déterminer* ***un modèle*** *de la formule*

$$\forall x \exists y (P(x, y) \wedge x \neq y)$$

□