

Éléments de Logique Formelle et du Raisonnement Mathématique : Rattrapage

Stéphane Devismes

24 juin 2025

2 pages

Total : 120 points

Durée : 2h00

Documents autorisés : une feuille recto verso de notes manuscrites format A4.

Le barème est *indicatif*, les points correspondent au nombre de minutes nécessaires pour réaliser les exercices.
L'épreuve sera notée sur 120 points.

Le résultat d'une question peut être admis pour s'en servir dans la suite de l'énoncé.

Les exercices peuvent être traités dans l'ordre de votre choix à condition de les numérotter clairement.

Exercice 1 (Arbre, table de vérité, formes normales et conséquences (25 points))

Soit A la formule $a \Rightarrow b \Leftrightarrow \neg a \vee c \wedge \neg b$

1. Donnez la représentation arbre de la formule A . (3 points)
2. Donnez la table de vérité de la formule A . (10 points)
3. Déduisez de la table de vérité une forme normale disjonctive de la formule A . (3 points)
4. Déduisez de la table de vérité une forme normale conjonctive de la formule A . (3 points)
5. La formule A est-elle une conséquence de $a \Rightarrow b$? Justifiez. (3 points)
6. $a \Rightarrow b$ est-elle une conséquence de la formule A ? Justifiez. (3 points)

□

Exercice 2 (Arbre et formes normales (20 points))

Soit A la formule

$$(((a \Rightarrow \neg b) \Leftrightarrow \neg c) \wedge (c \vee d)) \wedge (a \Leftrightarrow d)$$

1. Donnez la représentation arbre de la formule A . (2 points)
2. Donnez la définition de tautologie et de contradiction. (2 points)
3. A est-elle une tautologie? (justifiez) (2 points)
4. A est-elle une contradiction? (justifiez) (2 points)
5. Donnez la forme normale conjonctive de A . (détaillez) (6 points)
6. Donnez la forme normale disjonctive de A . (détaillez) (6 points)

□

Exercice 3 (Formalisation : Cluedo (35 points)) Un meurtre a eu lieu. Sherlock Holmes et le docteur Watson mènent l'enquête. Sherlock recueille les indices suivants :

1. Le meurtre a eu lieu soit dans le salon, soit dans la piscine.
2. Si le meurtre a eu lieu dans le salon alors le meurtrier est soit le docteur Olive, soit mlle Rose.
3. Si le meurtre a eu lieu dans la piscine alors le meurtrier est le colonel Moutarde.
4. Si le meurtrier est le docteur Olive ou mlle Rose alors l'arme du crime est ni la clef anglaise, ni le chandelier.
5. L'arme du crime est soit la clef anglaise, soit le chandelier.

À partir des faits suivants, Sherlock Holmes affirme au docteur Watson : « Le colonel Moutarde est le meurtrier, élémentaire mon cher Watson ! ».

Questions :

- Formalisez les faits et la conclusion de Sherlock Holmes à l'aide des notations suivantes : (18 points)
 - s : le meurtre a eu lieu dans le salon.
 - p : le meurtre a eu lieu dans la piscine.
 - o : le meurtrier est le docteur Olive.
 - r : le meurtrier est mlle Rose.
 - m : le meurtrier est le colonel Moutarde.
 - a : l'arme du crime est la clef anglaise.
 - c : l'arme du crime est le chandelier.

Remarquons que « soit x , soit y » se modélise par $\overline{x} \Leftrightarrow \overline{y}$.

- Mettez la conjonction des faits et la négation de la conclusion en forme normale conjonctive. (7 points)
- Prouvez par résolution que le raisonnement de Sherlock est correct. (10 points)

□

Exercice 4 (Formalisation au premier ordre, exercice de TD (20 points))

Nous considérons $\Sigma = \{fr^2, o^{r^2}, c^{r^2}, j^{r^2}, r^{f^0}, p^{f^1}\}$ la signature ayant la sémantique donnée ci-dessous.

- $f(x, y) : x$ est frère de y .
- $o(x, y) : x$ est l'oncle de y .
- $c(x, y) : x$ est le cousin de y .
- $j(x, y) : x$ est plus jeune que y .
- r est le diminutif de Robert.
- $p(x)$ est le père de x .

Exprimez en logique du premier ordre et en utilisant la signature Σ les phrases suivantes :

1. Tout frère du père de Robert est un oncle de Robert. (4 points)
2. Si les pères de deux enfants sont des frères alors ces deux enfants sont des cousins. (4 points)
3. Robert a un cousin plus jeune qu'un des frères de Robert. (4 points)

Exprimez en français les propositions logiques suivantes :

1. $\neg \exists x \ j(p(x), x)$ (4 points)
2. $\forall x \forall y (p(p(x)) = p(p(y)) \Rightarrow c(x, y))$ (4 points)

□

Exercice 5 (Expansions (20 points))

1. À l'aide de la méthode des expansions, déterminez **un contre-modèle** de la formule

$$\forall x \forall y (R(x, y) \wedge R(y, x) \Rightarrow R(x, x))$$

(10 points)

2. À l'aide de la méthode des expansions, déterminez **un modèle** de la formule

$$\forall x \exists y (P(x, y) \wedge x \neq y)$$

(10 points)

□