Éléments de Logique Formelle et du Raisonnement Mathématique

Transformation d'une formule logique

Stéphane Devismes

Université de Picardie Jules Verne

30 janvier 2026

Lors du dernier cours

- Logique propositionnelle
- Syntaxe
- Sens des formules

Notre exemple avec une table de vérité

Hypothèses :

- (H1) : Si Pierre est grand, alors Jean n'est pas le fils de Pierre
- (H2) : Si Pierre n'est pas grand, alors Jean est le fils de Pierre
- (H3) : Si Jean est le fils de Pierre alors Marie est la soeur de Jean

Conclusion (C) : Marie est la soeur de Jean ou Pierre est grand ou les deux à la fois.

Question : Peut-on déduire C de H1, H2 et H3 ? C'est-à-dire, H1, H2, H3 $\models$ C ?

D'après la propriété 1.3, la réponse est OUI ssi la formule ci-dessous est une tautologie :

$$(p \Rightarrow \neg j) \wedge (\neg p \Rightarrow j) \wedge (j \Rightarrow m) \Rightarrow m \vee p$$

p	j	m	$A = p \Rightarrow \neg j$	$B = \neg p \Rightarrow j$	$C = j \Rightarrow m$	$A \wedge B \wedge C$	$m \vee p$	$A \wedge B \wedge C \Rightarrow m \vee p$
0	0	0	1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0	1	1
1	1	1	0	1	1	0	1	1

La réponse est donc OUI !

Préambule

Comment prouver qu'une formule est valide ?

- Table de vérité
  - Problème : pour une formule à 100 variables, la table de vérité aura 2^{100} lignes (non calculable même par un ordinateur !).
- Idée :
  - Simplifier la formule en utilisant les **substitutions**, les **remplacements**, ou encore les **transformations en formes normales** (disjonctives ou conjonctives)
  - Puis, résoudre la formule simplifiée en utilisant les tables de vérités ou un raisonnement logique (par exemple : équivalences remarquables)

Plan

Substitution

Définition 2.1

Une **substitution** σ est une application de l'ensemble des variables dans l'ensemble des formules.

$A\sigma$ = remplacer dans la formule toute variable x par la formule $\sigma(x)$.

Exemple : $A = \neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$

- Soit σ la substitution suivante : $\sigma(p) = (a \vee b), \sigma(q) = (c \wedge d)$
- $A\sigma = \neg((a \vee b) \wedge (c \wedge d)) \Leftrightarrow (\neg(a \vee b) \vee \neg(c \wedge d))$

Substitution à support fini

Définition 2.2

- **Support** d'une substitution σ : l'ensemble des variables x telles que $x\sigma \neq x$.
- Une substitution σ à **support fini** est notée $< x_1 := A_1, \dots, x_n := A_n >$, où $x_1, \dots, x_n$ sont des variables **distinctes**, $A_1 \neq x_1, \dots, A_n \neq x_n$ sont des formules et la substitution vérifie :
  - $\forall i, i \in 1, \dots n : x_i\sigma = A_i$
  - $\forall y, y \notin \{x_1, \dots, x_n\} : y\sigma = y$

Exemple 2.1

$A = x \vee x \wedge y \Rightarrow z \wedge y$ et $\sigma = < x := a \vee b, z := b \wedge c >$

$A\sigma = (a \vee b) \vee (a \vee b) \wedge y \Rightarrow (b \wedge c) \wedge y$

Propriétés des substitutions

Propriété 2.1

Soit A une formule, v une assignation et σ une substitution, nous avons $[A\sigma]_v = [A]_w$ où pour toute variable x, $w(x) = [\sigma(x)]_v$.

Exemple 2.2

Soit $A = x \vee y \vee d$
Soit $\sigma = < x := (a \vee b), y := (b \wedge c) >$
Soit v telle que $v(a) = 1$, $v(b) = 0$, $v(c) = 0$, $v(d) = 0$
$A\sigma = (a \vee b) \vee (b \wedge c) \vee d$
$[A\sigma]_v = (1 \vee 0) \vee (0 \wedge 0) \vee 0 = 1$
$w(x) = [\sigma(x)]_v = [(a \vee b)]_v = (1 \vee 0) = 1$
$w(y) = [\sigma(y)]_v = [(b \wedge c)]_v = (0 \wedge 0) = 0$
$w(d) = [\sigma(d)]_v = [d]_v = 0$
$[A]_w = 1 \vee 0 \vee 0 = 1$

Démonstration.

Soit A une formule, v une assignation et σ une substitution.
Preuve par récurrence sur la taille des formules. $\square$

Parenthèse sur le raisonnement par récurrence (1/3)

Le **raisonnement par récurrence** (ou par induction) est une forme de raisonnement visant à démontrer une propriété $P(n)$ portant sur tous les entiers naturels n à partir d'un certain rang n_0.

Le raisonnement par récurrence consiste à démontrer les points suivants.

1. Le cas de base : la propriété est satisfaite par un entier n_0 (généralement 0 ou 1)

   $$P(n_0) \text{ est vraie}$$

2. L'hérédité : chaque fois que la propriété est satisfaite par un certain nombre entier naturel $n \geq n_0$, elle est également satisfaite par son successeur, c'est-à-dire par le nombre entier $n+1$.

   $$\text{Pour tout entier } n \geq n_0, P(n) \Rightarrow P(n+1)$$

Pour ça marche ? (2/3)

Une fois cela établie, on en conclut que cette propriété est vraie pour tous les nombres entiers naturels supérieurs ou égaux à n_0.

En effet

$$\begin{array}{ll}
P(n_0) & \text{cas de base} \\
P(n_0+1) & P(n_0), P(n_0) \Rightarrow P(n_0+1) \models P(n_0+1) \text{ (modus ponens)} \\
 & \text{(on peut appliquer l'hérédité sur } n_0 \text{ car } n_0 \geq n_0\text{ !)} \\
P(n_0+2) & P(n_0+1), P(n_0+1) \Rightarrow P(n_0+2) \models P(n_0+2) \text{ (modus ponens)} \\
 & \text{(on peut appliquer l'hérédité sur } n_0+1 \text{ car } n_0+1 \geq n_0\text{ !)} \\
\ldots & \\
P(n_0+k) & P(n_0+k-1), P(n_0+k-1) \Rightarrow P(n_0+k) \models P(n_0+k) \\
\ldots &
\end{array}$$

Méthodologie pour la récurrence (3/3)

1. On repère le paramètre entier de la propriété à prouver : la mesure
   Dans le cas précédent, n
2. Cas de base : quelle est la plus petite valeur de la mesure ?
   Dans le cas précédent, n_0
   On prouve la propriété pour cette valeur ($P(n_0)$)

On veut ensuite prouver l'héridité
Pour tout entier $n \geq n_0, P(n) \Rightarrow P(n+1)$
Pour tout entier $n \geq n_0$, si $P(n)$ alors $P(n+1)$
Soit $n \geq n_0$, il faut prouver $P(n+1)$ sous l'hypothèse $P(n)$

3. Hypothèse de récurrence : on suppose $P(n)$ vraie pour une certaine valeur $n \geq n_0$
4. Étape de récurrence : à partir de l'hypothèse $P(n)$ on prouve $P(n+1)$

   Idée : trouver les relations reliant $P(n)$ et $P(n+1)$

   - on décompose $P(n+1)$ afin d'exprimer $P(n+1)$ en fonction de $P(n)$ ou
   - on construit $P(n+1)$ à partir de $P(n)$

   On utilise ces relations, un raisonnement logique les mettant en jeu et l'hypothèse de récurrence afin de déduire $P(n+1)$

FIN DE LA PARENTHÈSE

Cas de base : $|A| = 0$

Induction

Hypothèse : Supposons que la propriété soit vraie pour toute formule de taille inférieure ou égale à $n \geq 0$.

Soit A une formule de taille $n+1$, deux cas possibles :

Induction

Hypothèse : Supposons que la propriété soit vraie pour toute formule de taille inférieure ou égale à $n \geq 0$.

Soit A une formule de taille $n+1$, deux cas possibles :

□

Substitution d'une formule valide

Théorème 2.1

L'application d'une substitution à une formule valide donne une formule valide.

Démonstration.

Soit A une formule valide et σ une substitution.

Soit v une assignation quelconque.

□

Exemples

Exemple 2.3

Prouvons en utilisant les substitutions que $F = (a \wedge b) \vee \neg a \vee \neg b$ est valide.

Exemples

Exemple 2.4

Soit A la formule $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$. Cette formule est valide, c'est une équivalence remarquable. Soit σ la substitution suivante :
$< p := (a \vee b), q := (c \wedge d) >$. La formule $A\sigma$ =

Remplacement

Remplacer une formule par une formule.

Définition 2.3

Soient A, B, C, D des formules.
La formule D est obtenue en remplaçant dans C certaines occurrences de A par B
s'il existe une formule E et une variable x telles que, $C = E < x := A >$ et $D = E < x := B >$.

Exemples

Exemple 2.5

Considérons la formule $C = ((a \Rightarrow b) \vee \neg(a \Rightarrow b))$.

- La formule obtenue en remplaçant toutes les occurrences de $(a \Rightarrow b)$ par $(a \wedge b)$ dans C est

  C et D sont obtenues en considérant la formule $E = (x \vee \neg x)$ et les substitutions $< x := (a \Rightarrow b) >$ et $< x := (a \wedge b) >$.
- La formule obtenue en remplaçant la première occurrence de $(a \Rightarrow b)$ par $(a \wedge b)$ dans C est

  C et D sont obtenues en considérant la formule $E = (x \vee \neg(a \Rightarrow b))$ et les substitutions $< x := (a \Rightarrow b) >$ et $< x := (a \wedge b) >$.

Propriétés des remplacements (1/2)

Théorème 2.2

Soit C une formule et D la formule obtenue en remplaçant, dans C, des **occurrences** de la formule A par la formule B. Nous avons :
$(A \Leftrightarrow B) \models (C \Leftrightarrow D)$.

Démonstration.

Par définition du remplacement, il existe une formule E et une variable x telles que, $C = E < x := A >$ et $D = E < x := B >$. Supposons que v est une assignation modèle de $(A \Leftrightarrow B)$. Nous avons donc $[A]_v = [B]_v$. D'après la propriété 2.1 :

- $[C]_v = [E]_w$ où w est identique à v sauf que $w(x) = [A]_v$
- $[D]_v = [E]_{w'}$ où w' est identique à v sauf que $w'(x) = [B]_v$

Puisque $[A]_v = [B]_v$, les assignations w et w' sont identiques, donc $[C]_v = [D]_v$.
Par suite v est modèle de $(C \Leftrightarrow D)$. □

Application du théorème

Exemple 2.6

$p \Leftrightarrow q \models (p \vee (\boxed{p} \Rightarrow r)) \Leftrightarrow (p \vee (\boxed{q} \Rightarrow r))$.

Propriétés des remplacements (2/2)

Corollaire 2.1

Soit C une formule et D la formule obtenue en remplaçant, dans C, une **occurrence** de la formule A par la formule B. Nous avons : si $A \equiv B$ alors $C \equiv D$.

Démonstration.

Si $A \equiv B$, alors la formule $(A \Leftrightarrow B)$ est valide (propriété 1.1), donc la formule $(C \Leftrightarrow D)$ également puisqu'elle est, d'après le théorème 2.2, la conséquence de $(A \Leftrightarrow B)$. Par suite $C \equiv D$. □

Exemple 2.7

$(\neg(p \vee q) \Rightarrow (\boxed{\neg(p \vee q)} \vee r)) \equiv (\neg(p \vee q) \Rightarrow (\boxed{(\neg p \wedge \neg q)} \vee r))$, puisque $\neg(p \vee q) \equiv (\neg p \wedge \neg q)$.

Définitions

Définition 2.4

- Un **littéral** est une variable ou la négation d'une variable.
- Un **monôme** est une conjonction de littéraux.
- Une **clause** est une disjonction de littéraux.

Exemple

Exemple 2.8

Forme normale

Définition 2.5

Une formule est en **forme normale** si elle est soit une constante booléenne, soit une formule construite uniquement à l'aide des connecteurs $\wedge, \vee, \neg$ et dans laquelle les négations ne portent que sur des variables.

Exemple 2.9

La formule $\neg a \vee b$ est en forme normale, alors que la formule $a \Rightarrow b$ n'est pas en forme normale bien qu'elle soit équivalente à la première.

Méthode pour obtenir une forme normale :

1. Élimination des équivalences
2. Élimination des implications
3. Élimination des constantes
4. Déplacement des négations de sorte qu'elles ne portent que sur des variables

Éliminer une équivalence

Remplacer chaque occurrence de $A \Leftrightarrow B$ par l'une des sous-formules

(a) $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$

(b) $(\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)$

Éliminer une implication

Remplacer chaque occurrence de $A \Rightarrow B$ par $\neg A \vee B$

Éliminer les constantes

1. Remplacer une conjonction par 0 si elle comporte 0
2. Remplacer une disjonction par 1 si elle comporte un 1
3. Remplacer $\neg 1$ par 0 et $\neg 0$ par 1
4. Enlever les 0 des disjonctions et les 1 des conjonctions

Rappel : Dorénavant, nous identifions les constantes à leurs valeurs.

Déplacer les négations

Remplacer chaque occurrence de

(a) $\neg\neg A$ par A

(b) $\neg(A \vee B)$ par $\neg A \wedge \neg B$

(c) $\neg(A \wedge B)$ par $\neg A \vee \neg B$

Simplifications

Simplifier le plus tôt possible :

1. Remplacer une sous-formule de la forme $\neg(A \Rightarrow B)$ par $A \wedge \neg B$.
2. Remplacer une conjonction par 0 si elle comporte une formule et sa négation
3. Remplacer une disjonction par 1 si elle comporte une formule et sa négation
4. Appliquer les simplifications :
   - $x \vee (x \wedge y) = x$,
   - $x \wedge (x \vee y) = x$,
   - $x \vee (\neg x \wedge y) = x \vee y$
   - $x \wedge (\neg x \vee y) \equiv x \wedge y$
5. Appliquer l'idempotence de la conjonction et de la disjonction.

Forme normale disjonctive

Définition 2.6

Une formule est une **forme normale disjonctive** (en bref **fnd**) si et seulement si elle est une disjonction (somme) de monômes.

Appliquer en plus la distribution des conjonctions sur les disjonctions
$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

L'intérêt des fnd est de mettre en évidence ses modèles.

Exemple 2.10

$(x \wedge y) \vee (\neg x \wedge \neg y \wedge z)$ est une fnd, qui a deux modèles

Forme normale conjonctive

Définition 2.7

Une formule est une **forme normale conjonctive** (en bref **fnc**) si et seulement si elle est une conjonction (produit) de clauses.

Appliquer en plus la distributivité (inhabituelle) de la disjonction sur la conjonction :

- $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
- $(B \wedge C) \vee A = (B \vee A) \wedge (C \vee A)$.

L'intérêt des fnc est de mettre en évidence ses contre-modèles.

Exemple 2.11

$(x \vee y) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee z)$ est une fnc, qui a deux contre-modèles

Remarque 2.1

Par convention, nous considérons que 0 et 1 sont des disjonctions de monômes et des conjonctions de clauses.

Exemple

Transformer $(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow (\neg b \Rightarrow \neg a)$ en disjonctions de monôme (*fnd*) :

Autres exemples

Mise en **fnd** de :

$$(a \vee b) \wedge (c \vee d \vee e) \equiv$$

Mise en **fnc** de :

$$(a \wedge b) \vee (c \wedge d \wedge e) \equiv$$

Utilisation des disjonctions de monômes

BUT de transformer une formule en fnd

Déterminer si une formule est valide ou non.

Soit A une formule dont on souhaite déterminer la validité :

On transforme $\neg A$ en une disjonction de monômes **équivalente** B

- **Si** $B = 0$ alors $\neg A = 0$, donc $A = 1$, c'est-à-dire, A **est valide**
- **Sinon** B est égal à une disjonction de monômes non nuls équivalente à $\neg A$, qui nous donnent des modèles de $\neg A$, donc des contre-modèles de A.

Exemple

Soit $A = (p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \wedge q \Rightarrow r)$

Déterminer si A est valide.

Autre exemple

Soit $A = (a \Rightarrow b) \wedge c \vee (a \wedge d)$.

Déterminer si A est valide.

Définition

Définition 2.8

Une **algèbre de Boole** est un ensemble d'au moins deux éléments, 0, 1, et trois opérations, complément ($\overline{x}$), somme (+) et produit (.), qui vérifient les axiomes suivants :

1. la somme est :
   - associative : $x + (y + z) = (x + y) + z$,
   - commutative : $x + y = y + x$,
   - 0 est élément neutre de la somme : $0 + x = x$,
2. le produit est :
   - associatif : $x.(y.z) = (x.y).z$,
   - commutatif : $x.y = y.x$,
   - 1 est élément neutre du produit : $1.x = x$,
3. le produit est distributif sur la somme : $x.(y + z) = (x.y) + (x.z)$,
4. la somme est distributive sur le produit : $x + (y.z) = (x + y).(x + z)$,
5. les lois de la négation : $x + \overline{x} = 1$ et $x.\overline{x} = 0$.

La logique propositionnelle est une algèbre de Boole

Les axiomes se démontrent par tables de vérités.

notations logiques	notations booléennes
$\neg a$	$\overline{a}$
$a \wedge b$	$a.b$
$a \vee b$	$a + b$
$a \Rightarrow b$	$\overline{a} + b$
$a \Leftrightarrow b$	$a.b + (\overline{a}.\overline{b})$ ou $(a + \overline{b}).(\overline{a} + b)$

Figure 2.1 – Correspondances

Autre exemple d'algèbre de Boole

Algèbre de Boole	$\mathcal{P}(X)$
1	X
0	$\emptyset$
$\overline{p}$	$X - p$
$p + q$	$p \cup q$
$p.q$	$p \cap q$

Figure 2.2 – Ensemble des parties de l'ensemble X

Propriété d'une algèbre de Boole

Propriété 2.2

Pour tout x, il y a un et un seul y tel que $x + y = 1$ et $xy = 0$, autrement dit la négation est unique.
(preuve admise)

Propriété 2.3

1. $\overline{1} = 0$
2. $\overline{0} = 1$
3. $\bar{\bar{x}} = x$
4. Idempotence du produit : $x.x = x$
5. Idempotence de la somme : $x + x = x$
6. 1 est élément absorbant de la somme : $1 + x = 1$
7. 0 est élément absorbant du produit : $0.x = 0$
8. Lois de De Morgan : $\overline{xy} = \bar{x} + \bar{y}$ et $\overline{x+y} = \bar{x}.\bar{y}$

Preuve

1. $\overline{1} = 0$. Par définition de la négation, $x.\overline{x} = 0$.
   Donc, $1.\overline{1} = 0$.
   Puisque 1 est l'élément neutre du produit, nous avons $\overline{1} = 0$.
2. $\overline{0} = 1$. Par définition de la négation, $x + \overline{x} = 1$.
   Donc, $0 + \overline{0} = 1$.
   Puisque 0 est l'élément neutre de la somme, nous avons $\overline{0} = 1$.
3. $\bar{\bar{x}} = x$. Par les propriétés de la négation, : $x + \overline{x} = 1$ et $x.\overline{x} = 0$.
   Par commutativité : $\overline{x} + x = 1$, $\overline{x}.x = 0$.
   Or, la négation de $\overline{x}$, $\overline{\overline{x}}$, vérifie les lois de la négation : $\overline{x} + \overline{\overline{x}} = 1$, $\overline{x}.\overline{\overline{x}} = 0$.
   À cause de l'unicité de la négation (propriété 2.2),
   nous déduisons que x est la négation de $\overline{x}$: $\overline{\overline{x}} = x$.

Preuve

- Idempotence du produit : $x.x = x$.

$$\begin{aligned} x &= x.1 \\ &= x.(x + \overline{x}) \\ &= x.x + x.\overline{x} \\ &= x.x + 0 \\ &= x.x \end{aligned}$$

Preuve

- Idempotence de la somme : $x + x = x$.

$$\begin{aligned} x &= x + 0 \\ &= x + x.\overline{x} \\ &= (x + x).(x + \overline{x}) \\ &= (x + x).1 \\ &= x + x \end{aligned}$$

Preuve

- 1 est élément absorbant de la somme : $1 + x = 1$.
  Nous utilisons l'idempotence de la somme.

$$\begin{aligned} 1 + x &= (x + \overline{x}) + x \\ &= x + \overline{x} \\ &= 1 \end{aligned}$$

- 0 est élément absorbant du produit : $0.x = 0$.
  Nous utilisons l'idempotence du produit.

$$\begin{aligned} 0.x &= (x.\overline{x}).x \\ &= x.\overline{x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Preuve : Lois de De Morgan : $\overline{xy} = \overline{x} + \overline{y}$

Nous montrons d'abord que $xy + (\overline{x} + \overline{y}) = 1$

$$\begin{aligned} x.y + (\overline{x} + \overline{y}) &= (x + \overline{x} + \overline{y}).(y + \overline{x} + \overline{y}) \\ &= (1 + \overline{y}).(1 + \overline{x}) \\ &= 1.1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Nous prouvons aussi que $x.y.(\overline{x} + \overline{y}) = 0$.

$$\begin{aligned} x.y.(\overline{x} + \overline{y}) &= x.y.\overline{x} + x.y.\overline{y} \\ &= 0.y + x.0 \\ &= 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Puisque la négation est unique, $\overline{x} + \overline{y}$ est bien la négation de xy.

Preuve : Lois de De Morgan : $\overline{x + y} = \overline{x}.\overline{y}$

Nous montrons d'abord que $(x + y) + \overline{x}.\overline{y} = 1$

$$\begin{aligned} (x + y) + \overline{x}.\overline{y} &= (x + y + \overline{x}).(x + y + \overline{y}) \\ &= (1 + y).(x + 1) \\ &= 1.1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Nous prouvons aussi que $(x + y).\overline{x}.\overline{y} = 0$.

$$\begin{aligned} (x + y).\overline{x}.\overline{y} &= (x.\overline{x}.\overline{y}) + (y.\overline{x}.\overline{y}) \\ &= (0.\overline{y}) + (0.\overline{x}) \\ &= 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

De l'unicité de la négation, nous concluons que $\overline{x}.\overline{y}$ est bien la négation de $(x + y)$

Définition 2.9

Une **fonction booléenne** est une fonction dont les arguments et le résultat sont dans le domaine $\{0, 1\}$.

Exemple 2.12

- La fonction $f : \mathbb{B} \to \mathbb{B} : f(x) = \overline{x}$
- La fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{B} : f(x) = x \bmod 2$
- La fonction $f : \mathbb{B} \to \mathbb{N} : f(x) = x + 1$
- La fonction $f : \mathbb{B} \times \mathbb{B} \to \mathbb{B} : f(x, y) = \overline{x.y}$

Fonctions booléennes et somme de monômes

Théorème 2.3

Pour toute variable x, nous posons $x^0 = \overline{x}$ et $x^1 = x$.

Soit f une fonction booléenne à n arguments. Cette fonction est représentée à l'aide de n variables $x_1, \dots, x_n$. Soit A la formule suivante :

$$A = \sum_{f(a_1,\dots,a_n)=1} x_1^{a_1} \,.\, \cdots \,.\, x_n^{a_n}.$$

Les a_i sont des valeurs booléennes et A est la somme des monômes $x_1^{a_1} \,.\, \cdots \,.\, x_n^{a_n}$ tels que $f(a_1, \dots, a_n) = 1$. Par convention, si la fonction f vaut toujours 0 alors $A = 0$.

Pour toute assignation v telle que $v(x_1) = a_1, \dots, v(x_n) = a_n$, nous avons $f(a_1, \dots, a_n) = [A]_v$.

Exemple

Exemple 2.13

La fonction *maj* à 3 arguments vaut 1 lorsqu'au moins 2 de ses arguments valent 1.

Définir la somme de monômes équivalente (théorème 2.3)

x_1	x_2	x_3	$maj(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	**1**
1	0	0	0
1	0	1	**1**
1	1	0	**1**
1	1	1	**1**

$$maj(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1}\,x_2\,x_3 + x_1\,\overline{x_2}\,x_3 + x_1\,x_2\,\overline{x_3} + x_1\,x_2\,x_3$$

Vérifions le théorème 2.3 sur l'exemple 2.13

x_1	x_2	x_3	$maj(x_1, x_2, x_3)$	$\overline{x_1}\,x_2\,x_3$	$x_1\,\overline{x_2}\,x_3$	$x_1\,x_2\,\overline{x_3}$	$x_1\,x_2\,x_3$	$\overline{x_1}\,x_2\,x_3 + x_1\,\overline{x_2}\,x_3 + x_1\,x_2\,\overline{x_3} + x_1\,x_2\,x_3$
0	0	0	**0**	0	0	0	0	**0**
0	0	1	**0**	0	0	0	0	**0**
0	1	0	**0**	0	0	0	0	**0**
0	1	1	**1**	1	0	0	0	**1**
1	0	0	**0**	0	0	0	0	**0**
1	0	1	**1**	0	1	0	0	**1**
1	1	0	**1**	0	0	1	0	**1**
1	1	1	**1**	0	0	0	1	**1**

Preuve du Théorème 2.3

Soit v une assignation quelconque. Notons que pour toute variable x, $[x^a]_v = 1$ si et seulement si $v(x) = a$. De cette remarque, nous déduisons la propriété suivante :

$$[x_1^{a_1} \,.\, \cdots \,.\, x_n^{a_n}]_v = 1 \text{ si et seulement si } v(x_1) = a_1, \dots, v(x_n) = a_n. \qquad (1)$$

Soient $a_1, \dots, a_n$ une liste de n valeurs booléennes et v une assignation telle que $v(x_1) = a_1, \dots v(x_n) = a_n$. Considérons les deux cas suivants :

1. $f(a_1, \dots, a_n) = 1$: Le monôme $x_1^{a_1} \,.\, \cdots \,.\, x_n^{a_n}$ est alors un des monômes de A.
   D'après (1), nous avons $[x_1^{a_1} \,.\, \cdots \,.\, x_n^{a_n}]_v = 1$.
   Puisque, par définition de A, ce monôme est élément de la somme A, nous avons $[A]_v = 1$.
2. $f(a_1, \dots, a_n) = 0$: Supposons, par contradiction, que $[A]_v = 1$.
   Il existe alors un monôme de A, $x_1^{b_1} \,.\, \cdots \,.\, x_n^{b_n}$, tel que $[x_1^{b_1} \,.\, \cdots \,.\, x_n^{b_n}]_v = 1$.
   Par définition de A, nous avons $f(b_1, \dots, b_n) = 1$.
   Or, d'après (1), nous avons $[x_1^{b_1} \,.\, \cdots \,.\, x_n^{b_n}]_v = 1$ si et seulement si $v(x_1) = b_1, \dots, v(x_n) = b_n$, donc par définition de v, $a_1 = b_1, \dots, a_n = b_n$.
   Nous obtenons donc une contradiction avec $f(a_1, \dots, a_n) = 1$, par suite $[A]_v = 0$.

Fonctions booléennes et produit de clauses

Théorème 2.4

Pour toute variable x, nous posons $x^0 = \overline{x}$ et $x^1 = x$.

Soit f une fonction booléenne à n arguments. Cette fonction est représentée à l'aide de n variables $x_1, \ldots, x_n$. Soit A la formule suivante :

$$A = \prod_{f(a_1,\ldots,a_n)=0} x_1^{\overline{a_1}} + \ldots + x_n^{\overline{a_n}}.$$

Les a_i sont des valeurs booléennes et A est le produit des clauses $x_1^{\overline{a_1}} + \ldots + x_n^{\overline{a_n}}$ telles que $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$. Par convention si la fonction f vaut toujours 1 alors $A = 1$.

Pour toute assignation v telle que $v(x_1) = a_1, \ldots, v(x_n) = a_n$, nous avons $f(a_1, \ldots, a_n) = [A]_v$.

Preuve du théorème 2.4

La preuve du théorème est à faire chez vous.

Soit v une assignation quelconque. Notons que pour toute variable x, $[x^a]_v = 0$ si et seulement si $v(x) \neq a$. De cette remarque, nous déduisons la propriété suivante :

$$\begin{aligned}
[x_1^{\overline{a_1}} + \ldots + x_n^{\overline{a_n}}]_v = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad v(x_1) \neq \overline{a_1}, \ldots v(x_n) \neq \overline{a_n} && (1)\\
&\Leftrightarrow \quad v(x_1) = a_1, \ldots v(x_n) = a_n. && (2)
\end{aligned}$$

Des propriétés ci-dessus, nous déduisons comme précédemment que $f(x_1, \ldots x_n) = A$.

Exemple

Exemple 2.14

La fonction *maj* à 3 arguments vaut 1 lorsqu'au moins 2 de ses arguments valent 1.

Définir le produit de clauses équivalent (théorème 2.4)

x_1	x_2	x_3	$maj(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	**0**
0	0	1	**0**
0	1	0	**0**
0	1	1	1
1	0	0	**0**
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Vérifions le théorème 2.4 sur l'exemple 2.14

x_1	x_2	x_3	$maj(x_1, x_2, x_3)$	$x_1+x_2+x_3$	$x_1+x_2+\overline{x_3}$	$x_1+\overline{x_2}+x_3$	$\overline{x_1}+x_2+x_3$	$(x_1+x_2+x_3)$ $(x_1+x_2+\overline{x_3})$ $(x_1+\overline{x_2}+x_3)$ $(\overline{x_1}+x_2+x_3)$
0	0	0	**0**	0	1	1	1	**0**
0	0	1	**0**	1	0	1	1	**0**
0	1	0	**0**	1	1	0	1	**0**
0	1	1	**1**	1	1	1	1	**1**
1	0	0	**0**	1	1	1	0	**0**
1	0	1	**1**	1	1	1	1	**1**
1	1	0	**1**	1	1	1	1	**1**
1	1	1	**1**	1	1	1	1	**1**

Aujourd’hui

- Substitutions et remplacements
- Formes normales
- Algèbre de Boole
- Fonctions booléennes

La prochaine fois

- Résolution

Merci de votre attention.