Éléments de Logique Formelle et du Raisonnement Mathématique

Résolution Propositionnelle

Stéphane Devismes

Université de Picardie Jules Verne

23 octobre 2026



Au dernier cours

- Substitutions et remplacements
- Formes normales
- Algèbre de Boole
- Fonctions booléennes

Jean, Pierre et Marie par simplification

$$(p \Rightarrow \neg j) \wedge (\neg p \Rightarrow j) \wedge (j \Rightarrow m) \Rightarrow m \vee p$$

$$\neg(p \Rightarrow \neg j) \vee \neg(\neg p \Rightarrow j) \vee \neg(j \Rightarrow m) \vee m \vee p$$

$$\neg(\neg p \vee \neg j) \vee \neg(\neg\neg p \vee j) \vee \neg(\neg j \vee m) \vee m \vee p$$

$$(p \wedge j) \vee (\neg p \wedge \neg j) \vee (j \wedge \neg m) \vee m \vee p$$

avec $x \vee x \wedge y = x$

$$(\neg p \wedge \neg j) \vee (j \wedge \neg m) \vee m \vee p$$

avec $x \vee \neg x \wedge y = x \vee y$

$$\neg j \vee j \vee m \vee p = 1$$

Plan

1. Introduction
2. Quelques définitions et notations
3. Cohérence
4. Complétude
5. Conclusion

Méthodes de déduction

- Une formule est-elle valide ?
- Un raisonnement est-il correct ?

Deux méthodes :

Les tables de vérités et les transformations

Problème

Si le nombre de variables augmente, ces méthodes sont très longues

Aujourd'hui

- Formalisation d'un **système de déduction** (1 règle)
- Comment prouver une formule par **résolution**
- Cohérence du système
- Complétude du système

Exemple

Par une table de vérité, pour vérifier
$a \Rightarrow b, b \Rightarrow c, c \Rightarrow d, d \Rightarrow e, e \Rightarrow f, f \Rightarrow g, g \Rightarrow h, h \Rightarrow i, i \Rightarrow j \models a \Rightarrow j$
il faut tester $2^{10} = 1024$ lignes.

Or, par déduction, ce raisonnement est correct :

1. Par transitivité de l'implication, $a \Rightarrow j \models a \Rightarrow j$.
2. Par définition, la formule $a \Rightarrow j$ est une conséquence d'elle-même.

Intuition

$$a + \overline{b}, b + c \models a + c$$

Notation

$s(A)$ l'ensemble des littéraux de la clause A.

Par convention $\perp$ est la clause vide et $s(\perp) = \emptyset$.

Exemple 3.1

$s(\overline{q} + p + r + p + \overline{p}) =$

Définitions

Définition 3.1

- Un littéral est **élément d'une clause**, s'il est élément de l'ensemble des littéraux de la clause.
- Une clause A est **incluse dans une clause** B, si tous les littéraux de la clause A sont éléments de la clause B.

  Dans ce cas, A est une **sous-clause** de B.
- Deux clauses sont **égales** si elles ont le même ensemble de littéraux.

Exemple

Exemple 3.2

Littéral complémentaire

Définition 3.2

Nous notons L^c le **littéral complémentaire** d'un littéral L :

Si L est une variable, L^c est la négation de L.

Si L est la négation d'une variable, L^c est obtenu en enlevant la négation de L.

Exemple 3.3

$x^c = \overline{x}$ et $\overline{x}^c = x$.

Résolvant

Définition 3.3

Soient A et B deux clauses.

La clause C est **un résolvant** de A et B ssi $\exists L$ tel que

$$L \in s(A), L^c \in s(B), s(C) = (s(A) - \{L\}) \cup (s(B) - \{L^c\})$$

C est un résolvant de A et B est dessiné par :

$$\frac{A \qquad B}{C}$$

C est engendrée par A et B
A et B sont les parents de la clause C.

Exemples de résolution

Exemple 3.4

Donnez les résolvants de :

- $p+q+r$ et $p+\bar{q}+r$
- $p+\bar{q}$ et $\bar{p}+q+r$
- p et $\bar{p}$

Propriété

Propriété 3.1

Si l'un des parents d'un résolvant est valide, le résolvant est valide ou contient l'autre parent.

Preuve.

Cette preuve est demandée dans TD. □

Exemple 3.5

$\frac{p+\bar{p}+q \qquad r+\bar{q}}{p+\bar{p}+r}$ avec $p+\bar{p}+r$ valide.

$\frac{p+\bar{p}+q \qquad r+\bar{p}}{\bar{p}+q+r}$ avec $\bar{p}+q+r$ qui contient $r+\bar{p}$.

Problème du +

Étant données deux clauses A et B, la formule $A+B$ n'est pas une clause si l'un des deux opérandes de la disjonction est la clause vide.

Exemple : $\bot + p$ n'est pas une clause.

Solution : $\tilde{+}$

Définition 3.4

Soient C et D deux clauses.

Nous notons $C\tilde{+}D$ la clause suivante :

- Si $C = \bot$ alors $C\tilde{+}D = D$,
- sinon
  - si $D = \bot$ alors $C\tilde{+}D = C$
  - sinon $C\tilde{+}D = C + D$.

Ajouter le littéral L à la clause C, c'est construire $C\tilde{+}L$.

Résolvant : définition alternative

Définition 3.5

Soient A et B deux clauses.

La clause C est un **résolvant** de A et B si et seulement si il y a un littéral L tel que :

- L est élément de la clause A, L^c est élément de la clause B
- C est égale à la clause $A'\tilde{+}B'$ où
  - $A' = A - \{L\}$ est obtenue en enlevant L de A et
  - $B' = B - \{L^c\}$ est obtenue en enlevant L^c de B.

Preuve

Définition 3.6

Soient Γ un ensemble de clauses et C une clause.

Une **preuve** de C à partir de Γ est une liste de clauses qui se termine par C. Toute clause de la preuve est

- égale à un élément de Γ ou
- est un résolvant de deux clauses la précédant dans la preuve.

La clause C est **déduite** de Γ, notée $\Gamma \vdash C$, s'il y a une preuve de C à partir de Γ.

Exemple de preuve

Exemple 3.6

Soit Γ l'ensemble de clauses $\overline{p}+q, p+\overline{q}, \overline{p}+\overline{q}, p+q$. **Nous montrons que** $\Gamma \vdash \bot$:

Preuve en arbre

Exemple 3.7

Soit Γ l'ensemble de clauses $\bar{p}+q, p+\bar{q}, \bar{p}+\bar{q}, p+q$. **Nous montrons que** $\Gamma \vdash \bot$:

Propriétés triviales : Monotonie et Composition

Propriété 3.2

Soient Γ, Δ deux ensembles de clauses et A, B deux clauses.

1. **Monotonie de la déduction** : Si $\Gamma \vdash A$ et si Γ est inclus dans Δ alors $\Delta \vdash A$
2. **Composition des déductions** : Si $\Gamma \vdash A$, $\Gamma \vdash B$ et si C est un résolvant de A et B alors $\Gamma \vdash C$.

Taille de preuve

Définition 3.7

Une preuve P de C à partir d'un ensemble de clause Γ est de taille n si elle contient n **lignes**.

Définition

La **cohérence** d'un système logique, c'est le fait que les preuves obtenues dans ce système sont « correctes » :

Si $\Gamma \vdash C$ **alors** $\Gamma \models C$

Cohérence de la règle de résolution

Théorème 3.1

Si C est un résolvant de A et B alors $A, B \models C$.

Preuve.

Si C est un résolvant de A et B, alors il y a un littéral L tel que

$$L \in s(A), L^c \in s(B), s(C) = (s(A) - \{L\}) \cup (s(B) - \{L^c\}).$$

Supposons un modèle v de A et B : $[A]_v = 1$ et $[B]_v = 1$.

Montrons que $[C]_v = 1$.

- **Supposons que** $[L]_v = 1$. Donc $[L^c]_v = 0$. v est donc modèle d'un littéral de $(s(B) - \{L^c\})$ car $[B]_v = 1$. Donc $[C]_v = 1$.
- **Supposons que** $[L^c]_v = 1$. Donc $[L]_v = 0$. v est donc modèle d'un littéral de $(s(A) - \{L\})$ car $[A]_v = 1$. Donc $[C]_v = 1$.

Puisque toute assignation est modèle de L ou L^c, v est modèle de C.

Puisque v est modèle quelconque de A et B, C **est une conséquence de** A **et** B**.**

□

Cohérence de la déduction

Théorème 3.2

Soit Γ un ensemble de clauses et C une clause. Si $\Gamma \vdash C$ alors $\Gamma \models C$.

Preuve.

Supposons que $\Gamma \vdash C$: il y a une preuve P de C à partir de Γ.

Supposons que pour toute preuve de D à partir de Γ, **plus courte** que P, nous avons $\Gamma \models D$.

Montrons que $\Gamma \models C$. Nous avons deux cas possibles :

1. C a le même ensemble de littéraux qu'un élément de Γ, dans ce cas $\Gamma \models C$.
2. $\Gamma \vdash A$, $\Gamma \vdash B$ et

$$\frac{A \quad B}{C}$$

Par hypothèse de récurrence : $\Gamma \models A$ et $\Gamma \models B$. D'après le théorème 3.1 : $A, B \models C$. Donc $\Gamma \models C$.

□

Définition

Complétude pour la réfutation :

$$\text{Si } \Gamma \models \bot \text{ alors } \Gamma \vdash \bot.$$

Nous démontrons ce résultat pour Γ fini.

$\Gamma[L := 1]$

Définition 3.8

Soient Γ un ensemble de clauses et L un littéral.

$\Gamma[L := 1]$ est l'ensemble de clauses obtenu en supprimant les clauses dont L est élément et en enlevant L^c des autres clauses.

Nous posons $\Gamma[L := 0] = \Gamma[L^c := 1]$.

Exemples

Exemple 3.8

Soit Γ l'ensemble de clauses $\overline{p}+q, \overline{q}+r, p+q, p+r$. Nous avons :

- $\Gamma[p := 1] =$

- $\Gamma[p := 0] =$

Observons que :

- $(\overline{1}+q)(\overline{q}+r)(1+q)(1+r) =$

- $(\overline{0}+q)(\overline{q}+r)(0+q)(0+r) =$

Notation et définition

Nous notons $v[L := 1]$ l'assignation qui modifie v en forçant L à la valeur 1, L^c à la valeur 0 et ne change pas la valeur des autres littéraux dans v.

Définition 3.9

Soit une assignation v. L'assignation $v[L := 1]$ est l'assignation identique à v sauf éventuellement pour x, la variable de L :

- si $L = x$, alors $v[L := 1](x) = 1$,
- si $L = \overline{x}$, alors $v[L := 1](x) = 0$.

Nous posons $v[L := 0] = v[L^c := 1]$.

Propriété de $\Gamma[L := x]$

Propriété 3.3

Soient Γ un ensemble de clauses et L un littéral. Γ a un modèle si et seulement si $\Gamma[L := 1]$ ou $\Gamma[L := 0]$ a un modèle.

Preuve.

$\Rightarrow$ Une assignation v est modèle de Γ.

$\Leftarrow$ $\Gamma[L := 1]$ ou $\Gamma[L := 0]$ a un modèle v.

□

Premier cas : v est modèle de Γ

1. **Supposons que v donne à L la valeur 1** et montrons que v est modèle de $\Gamma[L := 1]$.

   Soit C une clause de $\Gamma[L := 1]$.

   Il y a dans Γ une clause C' telle que C est obtenue en enlevant L^c de C'.

   Puisque v est modèle de Γ, v est modèle de C'

   donc d'un littéral de C' qui n'est pas L^c (car L^c vaut 0 dans v).

   D'où, v est modèle de C.

   Puisque C est une clause quelconque de $\Gamma[L := 1]$, v est modèle de $\Gamma[L := 1]$.

2. **Supposons que v donne à L la valeur 0.**

   Nous nous ramenons au cas précédent en échangeant L et L^c et nous montrons que v est modèle de $\Gamma[L := 0]$.

Deuxième cas : $\Gamma[L := 1]$ ou $\Gamma[L := 0]$ a un modèle v

1. **Supposons que v est modèle de $\Gamma[L := 1]$.** Montrons que $v[L := 1]$ est modèle de Γ. Soit C une clause de Γ.
   1. Supposons que L est un littéral de C.

      $v[L := 1]$ est modèle de C puisque $v[L := 1]$ donne à L la valeur 1.
   2. Supposons que L n'est pas un littéral de C.

      Alors il y a une clause C' élément de $\Gamma[L := 1]$ telle que C' est obtenue en enlevant L^c de C.

      La variable de L n'est pas une variable de C'.

      Donc, v et $v[L := 1]$ donnent la même valeur à C'.

      Puisque v est modèle de $\Gamma[L := 1]$, v est modèle de C' donc $v[L := 1]$ est modèle de C'.

      Puisque C' est incluse dans C, $v[L := 1]$ est modèle de C.

   Puisque C est une clause quelconque de Γ, $v[L := 1]$ est modèle de Γ.
2. **Supposons que v est modèle de $\Gamma[L := 0]$.**

   Par une preuve analogue, nous montrons que $v[L := 0]$ est modèle de Γ.

Propriété de $\Gamma[L := 1]$

Lemme 3.1

Soit Γ un ensemble de clauses, C une clause et L un littéral. Si $\Gamma[L := 1] \vdash C$ alors $\Gamma \vdash C$ ou $\Gamma \vdash C \dot{\vee} L^c$.

Preuve.

Partant d'une preuve de C à partir de $\Gamma[L := 1]$, nous obtenons une preuve de C ou de $C \dot{\vee} L^c$ à partir de Γ en ajoutant le littéral L^c aux clauses où nous l'avions enlevé.

Formalisons cette ébauche de preuve.

- Supposons que $\Gamma[L := 1] \vdash C$: Il y a une preuve P **de C à partir de $\Gamma[L := 1]$.**
- Supposons que pour toute preuve de D à partir de $\Gamma[L := 1]$, plus courte que P, nous avons $\Gamma \vdash D$ ou $\Gamma \vdash D \dot{\vee} L^c$.
- Nous avons deux cas possibles :
  1. C est égal à un élément de $\Gamma[L := 1]$.
  2. C est résolvant de 2 clauses A et B **précédant** C dans la preuve P.

□

Premier cas : C est égal à un élément de $\Gamma[L := 1]$

Donc il y a une clause C' élément de Γ telle que $s(C') = s(C)$ ou $s(C') = s(C) \cup \{L^c\}$.

Examinons ces deux cas.

1. Supposons $s(C') = s(C)$. Par définition des preuves, $\Gamma \vdash C$.
2. Supposons $s(C') = s(C) \cup \{L^c\}$. Nous avons $s(C') = s(C \dot{\vee} L^c)$ donc, par définition des preuves, $\Gamma \vdash C \dot{\vee} L^c$

Deuxième cas : C est résolvant de 2 clauses A et B précédant C dans la preuve P à partir de $\Gamma[L := 1]$

$\Gamma[L := 1] \vdash A$ et $\Gamma[L := 1] \vdash B$ par des preuves plus courte que P.

Par hypothèse de récurrence :

- $\Gamma \vdash A$ ou $\Gamma \vdash A \dot{\vee} L^c$
- $\Gamma \vdash B$ ou $\Gamma \vdash B \dot{\vee} L^c$

Ce qui donne **4** cas à examiner.

1. **Supposons $\Gamma \vdash A$ et $\Gamma \vdash B$.** Puisque C est résolvant de A et B, d'après la propriété 3.2, nous avons $\Gamma \vdash C$.
2. **Supposons $\Gamma \vdash A$ et $\Gamma \vdash B \dot{\vee} L^c$.**
   C est résolvant de A et B : il existe M tel que $M \in A$ et $M^c \in B$ et $s(C) = (s(A) - \{M\}) \cup (s(B) - \{M^c\})$.
   Aucune clause de $\Gamma[L := 1]$ ne comporte L^c. Donc B, qui en est déduite, ne comporte pas L^c. Ainsi, $L^c \neq M^c$.
   Donc, $(s(B) - \{M^c\}) \cup \{L^c\} = (s(B) \cup \{L^c\}) - \{M^c\} = (s(B \dot{\vee} L^c) - \{M^c\})$.
   Ainsi, $s(C \dot{\vee} L^c) = (s(A) - \{M\}) \cup (s(B) - \{M^c\}) \cup \{L^c\} = (s(A) - \{M\}) \cup (s(B \dot{\vee} L^c) - \{M^c\})$
   D'où, $C \dot{\vee} L^c$ est un résolvant de A et $B \dot{\vee} L^c$.
   Par la propriété 3.2, $\Gamma \vdash C \dot{\vee} L^c$.
3. **Supposons $\Gamma \vdash A \dot{\vee} L^c$ et $\Gamma \vdash B$**, en échangeant ci-dessus le rôle de A et B, nous obtenons $\Gamma \vdash C \dot{\vee} L^c$.
4. **Supposons $\Gamma \vdash A \dot{\vee} L^c$ et $\Gamma \vdash B \dot{\vee} L^c$**, comme ci-dessus nous obtenons $\Gamma \vdash C \dot{\vee} L^c$.

Par suite dans les quatre cas, nous avons $\Gamma \vdash C$ ou $\Gamma \vdash C \dot{\vee} L^c$.

Propriété de $\Gamma[L := 0]$

Lemme 3.2

Soit Γ un ensemble de clauses, C une clause et L un littéral.

Si $\Gamma[L := 0] \vdash C$ alors $\Gamma \vdash C$ ou $\Gamma \vdash C \tilde{+} L$.

Preuve.

Supposons $\Gamma[L := 0] \vdash C$.

Puisque $\Gamma[L := 0] = \Gamma[L^c := 1]$ et que $L^{cc} = L$,

d'après le lemme 3.1 nous avons $\Gamma \vdash C$ ou $\Gamma \vdash C \tilde{+} L$. □

Cas de base

Supposons que n est nul.

Donc $\Gamma = \emptyset$ ou $\Gamma = \{\bot\}$.

Le premier cas est impossible, car l'ensemble vide est valide (toute assignation en est modèle).

Donc $\Gamma = \{\bot\}$ et par suite $\Gamma \vdash \bot$.

Complétude de la résolution

Théorème 3.3

Soit Γ un ensemble fini de clauses. Si Γ est insatisfaisable alors $\Gamma \vdash \bot$.

Preuve.

Supposons que Γ est insatisfaisable.

Nous montrons que $\Gamma \vdash \bot$ **par récurrence** sur le nombre de variables n de Γ.

Hypothèse : Supposons que pour tout ensemble Δ de clauses insatisfaisable avec moins de n variables, nous avons $\Delta \vdash \bot$.

Montrons que $\Gamma \vdash \bot$. **Nous distinguons deux cas suivant que n est nul ou non nul.**

□

Pas de récurrence

Supposons que n est non nul.

Soit x une variable figurant dans Γ.

D'après la propriété 3.3, $\Gamma[x := 0]$ **et** $\Gamma[x := 1]$ **sont insatisfaisables**.

Puisque la variable x ne figure pas dans ces deux ensembles de clauses, l'hypothèse de récurrence s'applique, donc : $\Gamma[x := 0] \vdash \bot$ **et** $\Gamma[x := 1] \vdash \bot$.

Des lemmes 3.1 et 3.2, nous déduisons soit $\Gamma \vdash \bot$, soit $\Gamma \vdash \bar{x}$ **et** $\Gamma \vdash x$.

Dans le premier cas, la preuve est terminée.

Dans le deuxième cas, puisque $\bot$ **est un résolvant de** $\bar{x}$ **et** x, nous avons également $\Gamma \vdash \bot$ **par la propriété 3.2.**

Conclusion

Corollaire 3.1

Soit Γ un ensemble fini de clauses. Γ est insatisfaisable si et seulement si $\Gamma \vdash \bot$.

La prochaine fois

- Logique du premier ordre

Merci de votre attention.

Aujourd'hui

- Formalisation d'un **système de déduction**
- Cohérence du système
- Complétude du système