TD 1-2 : Introduction à la logique

Stéphane Devismes

28 janvier 2026

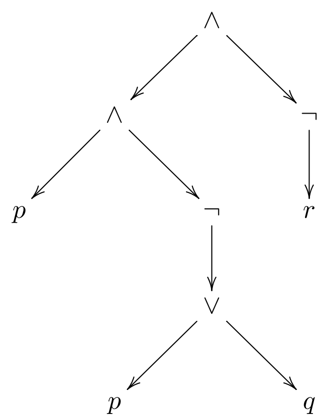
Exercices à faire absolument : 1, 2, 4, 5, 9, 10, 11 et 12.

Exercice 1 (Formules strictes, formules à priorité)**.** *Parmi les expressions suivantes, indiquer celles qui sont et celles qui ne sont pas des formules, au sens de la syntaxe stricte décrite dans la définition 1.3 :*

1. x
2. $(x$
3. (x)
4. $(x \Rightarrow (y \wedge z)$
5. $(x \Rightarrow (y \wedge z))$
6. $\neg(x \vee y)$
7. $(\neg(x \vee y))$
8. $\neg(x \Rightarrow y) \vee \neg(y \wedge z)$
9. $\neg(x)$
10. $(\neg((x \vee y) \wedge z) \Leftrightarrow (u \Rightarrow v)))$

□

Exercice 2 (Formules et priorités)**.** *L'arbre suivant représente la structure de la formule* $((p \wedge \neg(p \vee q)) \wedge \neg r)$*, dont la taille est de 5.*



En utilisant les priorités, elle peut s'écrire avec le moins de parenthèses possibles sous l'une des formes : $p \wedge \neg(p \vee q) \wedge \neg r$*. Comme sur cet exemple, pour chacune des formules suivantes, indiquer sa taille, sa structure sous forme d'arbre et sa forme la moins parenthésée :*

1. $(\neg(a \wedge b) \Leftrightarrow (\neg a \vee \neg b))$.
2. $((\neg a \vee b) \wedge (\neg b \vee a))$.
3. $(((a \wedge b) \wedge c) \vee ((\neg a \wedge \neg b) \wedge \neg c))$.
4. $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$.
5. $((p \Rightarrow q) \Rightarrow r)$.

□

Exercice 3 (Formules et priorités)**.** *Indiquer sous forme d'arbres, les structures des formules à priorité suivantes :*

1. $p \Leftrightarrow \neg q \vee r$.
2. $p \vee q \Rightarrow r \wedge s$.
3. $p \vee q \Rightarrow r \Leftrightarrow s$.
4. $p \vee q \wedge r \Rightarrow \neg s$.
5. $p \Rightarrow r \wedge s \Rightarrow t$.
6. $p \vee q \wedge s \vee t$.
7. $p \wedge q \Leftrightarrow \neg r \vee s$.
8. $\neg p \wedge q \vee r \Rightarrow s \Leftrightarrow t$.

□

Exercice 4 (Validité)**.** *Donner les tables de vérités des formules suivantes :*

1. $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$.
2. $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$.
3. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$.
4. $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$.

Indiquer celles qui sont valides. Indiquer les équivalences. □

Exercice 5 (Raisonnement circulaire)**.** *Donnez les tables de vérité de*

— $(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow c) \wedge (c \Rightarrow a)$ *et*
— $(a \Leftrightarrow b) \wedge (b \Leftrightarrow c) \wedge (c \Leftrightarrow a)$.

Puis, concluez que $(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow c) \wedge (c \Rightarrow a) \equiv (a \Leftrightarrow b) \wedge (b \Leftrightarrow c) \wedge (c \Leftrightarrow a)$.

□

Exercice 6 (Équivalence)**.** *Donner les tables de vérités des formules suivantes :*

1. $p \wedge (p \vee q)$.
2. $\neg p \wedge \neg q$.
3. $\neg(p \wedge q)$.
4. $\neg(p \vee q)$.
5. $p \vee (p \wedge q)$.
6. $\neg p \vee \neg q$.
7. p.

Parmi ces formules, indiquer les formules équivalentes.

□

Exercice 7 (Équivalence)**.** *Donner les tables de vérités des formules suivantes :*

1. $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$.
2. $p \Rightarrow q$.
3. $p \Leftrightarrow q$.
4. $\neg q \Rightarrow \neg p$.
5. $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$.

Parmi ces formules, Indiquer les formules équivalentes. □

Exercice 8 (Équivalence)**.** *Parmi les formules suivantes, indiquer celles qui sont équivalentes à* $p \Rightarrow q \vee r$ *?*

1. $q \wedge \neg r \Rightarrow p$.
2. $p \wedge \neg r \Rightarrow q$.
3. $\neg q \wedge \neg r \Rightarrow \neg p$.
4. $q \vee \neg p \vee r$.

□

Exercice 9 (Formalisation)**.** *Nous considérons les trois propositions suivantes :*

1. *Si Alice et Julie viennent à Paris, Zoé viendra aussi.*
2. *Si Julie vient à Paris, Alice aussi.*
3. *Soit Julie soit Zoé viendra à Paris, mais pas les deux.*

Questions :

- *Formalisez les trois propositions.*
- *Donnez leur table de vérité.*
- *Alice viendra-t-elle à Paris ? Et Julie ? Et Zoé ? (Justifiez)*

□

Exercice 10 (Lois de simplification)**.** *Prouver, sans table de vérité, que pour tout x, y :*

- $x \vee (x \wedge y) \equiv x$.
- $x \wedge (x \vee y) \equiv x$.
- $x \vee (\neg x \wedge y) \equiv x \vee y$.
- $x \wedge (\neg x \vee y) \equiv x \wedge y$.

□

Exercice 11 (Simplification de formule,*)**.** *Montrer par simplification que la formule suivante est une tautologie.*

$$(a \vee b) \wedge (\neg b \vee c) \Rightarrow (a \vee c)$$

□

Exercice 12 (Formalisation et simplification,*)**.** *Il existe en Écosse un club très fermé qui obéit aux règles suivantes :*

1. *Tout membre non écossais porte des chaussettes rouges.*
2. *Les membres mariés ne sortent pas le dimanche.*
3. *Un membre sort le dimanche si et seulement si il est écossais.*
4. *Tout membre qui porte un kilt est écossais et est marié.*
5. *Tout membre qui porte des chaussettes rouges porte un kilt.*
6. *Tout membre écossais porte un kilt.*

Formalisez ces règles et déduisez le nombre de membre du club.

Les règles de ce club concernent un membre éventuel du club, appelons le x.

1. *Pour formaliser chaque règle de l'énoncé, utilisez les variables booléennes suivantes :*
   - e *: x est un membre écossais,*
   - k *: x porte un kilt,*
   - m *: x est marié,*
   - c *: x porte des chaussettes rouges,*
   - d *: x sort le dimanche.*
2. *Simplifiez ensuite la conjonction des règles.*

□