TD 3-4 : Transformation d'une formule logique

Stéphane Devismes

16 février 2026

Exercices à faire absolument : 1, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11 et 14 (questions 1 à 3).

Exercice 1 (Modèles et formes normales)**.** *Soit A la formule suivante :*

$$(((a \Rightarrow \neg b) \Leftrightarrow \neg c) \wedge (c \vee d)) \wedge (a \Leftrightarrow d).$$

1. *Construisez, par simplification de formule, la forme normale conjonctive de A. (détaillez)*
2. *Construisez, par simplification de formule, la forme normale disjonctive de A. (détaillez)*
3. *A est-elle une tautologie ? (justifiez)*
4. *A est-elle une contradiction ? (justifiez)*

□

Exercice 2 (Récurrence,*)**.** *Montrer que toute formule construite avec une seule variable, uniquement les connecteurs binaires* $\vee$ *et* $\wedge$ *et sans négation est équivalente à une formule de taille* 0*.* □

Exercice 3. *À l'aide de tables de vérité, indiquer pour les opérations suivantes* $\Rightarrow, \Leftrightarrow$ *si elles sont commutatives, associatives, idempotentes, transitives.* □

Exercice 4. *Montrer qu'une formule avec une seule variable, notée p, est équivalente à l'une des formules,* $0, 1, p, \neg p$*.* □

Exercice 5. *Donnez* 16 *formules telles que toute formule avec deux variables, notées p et q, soit équivalente à l'une des* 16 *formules.*

□

Exercice 6 (Fonction booléenne)**.** *Indiquer en fonction de k combien il y a de fonctions booléennes à k arguments.* □

Exercice 7 (Conséquence)**.** *Au cours de l'enquête dont il est chargé, l'adjudant Tifrice effectue le raisonnement suivant :*

— *Si le meurtre a eu lieu le jour, le meurtrier est l'ami de la victime*
— *Or le meurtre a eu lieu la nuit*

Donc le meurtrier n'est pas l'ami de la victime. Le raisonnement de l'adjudant Tifrice est-il correct ? Pour cela nous procédons en trois étapes :

1. *Formalisation des faits.*
2. *Formalisation du raisonnement permettant de déduire la conclusion à partir des hypothèses.*
3. *Démontrer que le raisonnement est correct ou non.*

□

Exercice 8 (Conséquence)**.** *Pinocchio, Quasimodo et Roméo s'apprêtent à chanter en canon. Ils décident entre eux que :*

1. *Si Pinocchio ne chante pas alors Quasimodo chantera.*
2. *Si Quasimodo chante alors Pinocchio et Roméo chanteront.*
3. *Si Roméo chante alors Quasimodo ou Pinocchio, l'un des deux au moins, ne chantera pas.*

Peut-on en conclure que Pinocchio chantera ? Justifier votre réponse en formalisant le raisonnement. □

Exercice 9 (Conséquence)**.** *Formaliser les énoncés suivants en dégageant les connecteurs logiques.*

(a) Si Pierre est rentré chez lui, alors Jean est allé au cinéma.

(b) Marie est à la bibliothèque ou Pierre est rentré chez lui ou les deux.

(c) Si Jean est allé au cinéma, alors Marie est à la bibliothèque ou Pierre est rentré chez lui ou les deux.

(d) Marie n'est pas à la bibliothèque et Jean est allé au cinéma.

(e) Pierre est rentré chez lui.

Le dernier énoncé est-il conséquence des énoncés qui le précèdent ? □

Exercice 10 (Formes normales)**.** *Pour chaque formule donnée ci-après, donner sa forme normale disjonctive et prouver si elle est ou non satisfaisable (en donnant si besoin un modèle de la formule).*

— $\neg(a \Leftrightarrow b) \vee (b \wedge c) \Rightarrow c$.

— $(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow \neg a) \wedge (\neg a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a)$.

□

Exercice 11 (Formes normales)**.** *Soit A la formule $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$. Transformer A en une fnc. La formule A est-elle valide ?*

□

Exercice 12 (Conséquence et formes normales)**.** *L'adjudant Tifrice enquête une nouvelle fois. Ses hypothèses sont les suivantes :*

— *Si Jean n'a pas rencontré Pierre l'autre nuit, c'est que Pierre est le meurtrier ou que Jean est un menteur ou les deux.*

— *Si Pierre n'est pas le meurtrier, alors Jean n'a pas rencontré Pierre l'autre nuit et le crime a eu lieu après minuit.*

— *Si le crime a eu lieu après minuit, alors Pierre est le meurtrier ou Jean est un menteur ou les deux.*

Il en conclut que Pierre est le meurtrier. Son raisonnement est-il correct ? Donnez la réponse en construisant la conjonction des hypothèses et de la négation de la conclusion *et en mettant cette conjonction sous forme de somme de monômes. Nous rappelons que le raisonnement est incorrect si et seulement si un des monômes de la somme ne comporte pas de littéraux complémentaires : ce monôme donne un modèle des hypothèses, qui est un contre-modèle de la conclusion.*

□

Exercice 13 (Formalisation, somme de monômes,*)**.** *Nous nous trouvons sur une île dont les indigènes sont répartis en deux tribus, les Purs et les Pires. Les Purs disent toujours la vérité tandis que les Pires mentent toujours. Nous rencontrons deux indigènes, Aha et Bébé*[1]*.*

(a) Aha déclare : « L'un de nous au moins est un Pire ». Pouvons-nous en déduire ce que sont Aha et Bébé ?

(b) Aha déclare : « L'un de nous deux au plus est un Pire ». Pouvons-nous en déduire ce que sont Aha et Bébé ?

(c) Aha déclare :« Nous sommes tous les deux de la même tribu ». Pouvons-nous en déduire ce que sont Aha et Bébé ?

□

Exercice 14 (Ensemble complet et incomplet de connecteurs,**)**. *Un ensemble de constantes et de connecteurs est dit* complet*, si toute fonction booléenne est exprimable avec ces constantes et ces connecteurs. D'après le théorème 2.3, l'ensemble $\{0, 1, -, +, \bullet\}$ est complet.*

1. *Montrer que l'ensemble $\{-, +\}$ est complet.*
   Indication : il suffit de montrer que $\{0, 1, \bullet\}$ sont définissables à l'aide de $-$ et $+$.
2. *Montrer que l'ensemble $\{0, \Rightarrow\}$ est complet.*
3. *Soit $\mid$ l'opération suivante : $x \mid y$ est vrai si et seulement si ni l'un, ni l'autre ne sont vrais, autrement dit $x \mid y = 1$ si et seulement si $x = 0$ et $y = 0$. Cette opération est aussi appelée* ni *car $x \mid y$ est vrai si et seulement si ni x, ni y ne sont vrais.*
   Montrer que cette opération est complète.

1. Cette énigme provient du livre de Raymond M. Smullyan : « Quel est le titre de ce livre ? », qui contient bien d'autres problèmes amusants à propos de ces indigènes.

4. *(**) Montrer que l'ensemble* $\{0, 1, +, \bullet\}$ *est incomplet.*

   Indication : nous trouvons une propriété caractéristique des fonctions booléennes définies avec ces opérations et qui n'est pas vérifiée par toute fonction booléenne.

   Nous appelons monotone, une fonction f *telle que si* $a_1 \leq b_1, \ldots a_n \leq b_n$ *alors* $f(a_1, \ldots a_n) \leq f(b_1, \ldots b_n)$.

   Montrer que toute fonction booléenne définie avec $\{0, 1, +, \bullet\}$ *est monotone.*

   Proposer une fonction booléenne non monotone.

5. *(*) L'ensemble* $\{1, \Rightarrow\}$ *est-il complet ?*
6. *(**) L'ensemble* $\{0, \Leftrightarrow\}$ *est-il complet ?*

□