TD 5-6 : Résolution Propositionnelle et Récurrence

Stéphane Devismes

25 juin 2025

Exercices à faire absolument : 1, 2, 3, 4, 7 et 10.

Exercice 1 (Résolvant)**.** *Par résolution, nous avons :*

$$\frac{a+b \quad \overline{a}+\overline{b}}{b+\overline{b}}$$

Montrer que : $b+\overline{b} \not\models (a+b).(\overline{a}+\overline{b})$.

□

Exercice 2 (Résolvant)**.** *Nous rappelons que deux clauses sont égales si et seulement si elles ont les mêmes ensembles de littéraux.*

- *Les clauses* $p+q+\overline{r}+q+p+s+q+\overline{r}$ *et* $s+q+\overline{r}+p$ *sont-elles égales ?*
- *Les clauses* $p+q+r+p$ *et* $q+r+q+r+q+r$ *sont-elles égales ? L'une est-elle incluse dans l'autre ? L'une est-elle la conséquence de l'autre ? Sont-elles équivalentes ?*
- *Indiquer tous les résolvants des clauses* $a+\overline{b}+c$ *et* $a+b+\overline{c}$*. Ces résolvants sont-ils valides ?*

□

Exercice 3 (Preuve)**.** *Les ensembles de formules suivants sont insatisfaisables.*

- $\{a, a \Rightarrow b, \overline{b}\}$.
- $\{a+b, \overline{a}+c, \overline{a}+\overline{d}, d+\overline{c}, \overline{b}+a\}$.
- $\{a+b+c, \overline{a}+b, \overline{b}+c, \overline{c}+a, \overline{a}+\overline{b}+\overline{c}\}$.

En donner une preuve par résolution.

□

Exercice 4 (Formalisation et résolution,*)**.** *Remarquons que : « x à moins que y » se formalise en* $\neg(x \Leftrightarrow y)$*. Dans une maison hantée, les esprits se manifestent sous deux formes différentes, un* **chant obscène** *et un* **rire sardonique***, cependant nous pouvons influencer le comportement en jouant de l'orgue ou en brûlant de l'encens. Compte-tenu des données suivantes :*

(i) Le chant ne se fait pas entendre, à moins que nous jouions de l'orgue sans que le rire ne se fasse entendre.
(ii) Si nous brûlons de l'encens, le rire se fait entendre si et seulement si le chant se fait entendre.
(iii) (En ce moment) Le chant se fait entendre et le rire est silencieux.
Et de la conclusion :
(iv) (En ce moment) Nous jouons de l'orgue et ne brûlons pas d'encens.
Nous posons :

- *c : le chant se fait entendre.*
- *o : nous jouons de l'orgue.*
- *r : le rire se fait entendre.*
- *e : nous brûlons de l'encens.*

1. *Simplifier en produit de clauses* $\neg(x \Leftrightarrow y)$.
2. *Formaliser sous forme de produit de clauses les hypothèses et la négation de la conclusion.*
3. *Prouver par résolution que le raisonnement est correct.*

Autrement dit transformer le produit des hypothèses et de la négation de la conclusion en un produit de clauses, et en déduire la clause vide. □

Exercice 5 (Preuve,*)**.** *Montrer, à l'aide d'une preuve par résolution, la correction du raisonnement suivant :*

$$r \vee q \Rightarrow t, t \wedge q \Rightarrow r, q \models t \Leftrightarrow r$$

□

Exercice 6 (Formalisation et preuve,*)**.** *Montrer par résolution que le raisonnement suivant est contradictoire :*
- *Il fait beau à moins qu'il neige.*
- *Il pleut à moins qu'il neige.*
- *Il fait beau à moins qu'il pleuve.*

□

Exercice 7 (Propriété de la résolution,*)**.** *Montrer la propriété 3.1 du cours : si l'un des parents d'un résolvant est valide, le résolvant est valide ou contient l'autre parent.*

□

Exercice 8 (Formalisation et résolution)**.** *Considérons les hypothèses suivantes :*

1. *Si Pierre rate son tournoi alors Pierre sera déprimé.*
2. *S'il fait beau alors Pierre ira à la piscine.*
3. *Si Pierre ne va pas à la piscine il sera déprimé.*
4. *À la piscine, Pierre ne s'entraîne pas.*
5. *Pierre ratera son tournoi s'il ne s'entraîne pas.*

Nous souhaitons démontrer que des hypothèses précédentes, on peut déduire la conclusion suivante :
- *Pierre sera déprimé.*

Vous procéderez comme suit :
- *Formaliser les hypothèses et la négation de la conclusion.*
- *Déduire de vos énoncés formels un ensemble de clauses équivalent.*
- *Prouver qu'il est correct de déduire la conclusion à partir des hypothèses en démontrant avec une preuve* **par résolution** *que l'ensemble de clauses est contradictoire.*

□

Exercice 9 (Formalisation et résolution)**.** *Les Beatles étaient un groupe de rock qui s'est formé dans les années soixantes à Liverpool. Ce groupe était composé de quatres garçons : Ringo Starr, Paul MacCartney, John Lennon et Georges Harrison. À l'époque où s'est formé le groupe, il n'a pas été évident de décider qui allait jouer de quel instrument. Pour preuve, voici un extrait de leurs discussions :*

Paul dit : *« Si Ringo ne joue pas de la guitare, alors je jouerai de la basse et John jouera de la guitare »,*

Georges dit : *« Je jouerai de la guitare si et seulement si John en joue »,*

John dit : *« Si Paul joue de la basse, alors Georges jouera de la guitare »,*

Ringo dit : *« Je jouerai de la batterie et donc pas de la guitare ».*

Après cette discussion, ils décidèrent que :
- *Ringo jouerait à la batterie,*
- *Paul jouerait de la basse, et que*
- *John et Georges joueraient tous les deux de la guitare.*

Nous allons maintenant montrer que cette conclusion a satisfait tous les membres du groupe.

1. *Formalisez les quatres hypothèses et la conclusion en utilisant les variables propositionnelles suivantes :*
   - *RB : « Ringo joue de la batterie »,*
   - *RG : « Ringo joue de la guitare »,*
   - *PB : « Paul joue de la basse »,*
   - *JG : « John joue de la guitare », et*
   - *GG : « Georges joue de la guitare ».*
2. *Transformez en clauses les hypothèses et la négation de la conclusion.*
3. *Démontrez avec une preuve par résolution que la conclusion est conséquence des hypothèses.*

□

Exercice 10 (Démonstration par récurrence)**.** *Soit n un entier positif non nul. Soient $n+1$ variables notées $x_1, x_2, \dots x_n$ et y. On s'intéresse à la formule $\neg(x_n \Rightarrow x_{n-1} \Rightarrow \dots \Rightarrow x_1 \Rightarrow y)$.*

1. *Rappelez quelle est la formule stricte (parenthésée) correspondant à cette formule.*
2. *Démontrez par récurrence que $\neg(x_n \Rightarrow x_{n-1} \Rightarrow \dots \Rightarrow x_1 \Rightarrow y) \equiv x_n \wedge x_{n-1} \wedge \dots \wedge x_1 \wedge \neg y$.*

□

Exercice 11 (Démonstration par récurrence)**.** *Dans tout cet exercice on note $\oplus$ l'opérateur « ou exclusif », dont nous rappelons la table de vérité :*

x	y	$x \oplus y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

1. *Démontrez que le connecteur $\oplus$ est associatif, autrement dit que $(x \oplus y) \oplus z \ \equiv \ x \oplus (y \oplus z)$.*
2. *Soit n un entier positif non nul. Soient n variables* différentes *$x_1 \dots x_n$. Démontrez par récurrence que pour toute assignation v, on a $[x_1 \oplus x_2 \dots \oplus x_n]_v = 1$ si et seulement si le nombre de ces variables valant 1 dans v est impair.*

□

Exercice 12 (Démonstration par récurrence)**.** *Supposons que dans des conditions idéales, la reproduction des lapins suit la loi suivante : toutes les saisons, un couple de lapins adultes met au monde un couple de lapereaux ; les lapereaux mettent deux saisons pour devenir adultes et dès qu'ils le sont, ils se reproduisent à leur tour.*

Par exemple, si une personne achète un couple de lapereaux, au bout d'une saison, elle aura toujours un couple de lapins (un couple de « jeunes »). Au bout de deux saisons, elle aura deux couples de lapins (un de lapereaux et un d'adultes). Au bout de trois saisons, elle aura trois couples (un de lapereaux, un de jeunes, un d'adultes). Au bout de quatre saisons, elle en aura 5 puis 8, 13, ...

On peut remarquer que la suite des nombres de couples de lapins qu'on obtient est la suite de Fibonacci qui vérifie : $F(0) = 1$, $F(1) = 1$, $F(n) = F(n-1) + F(n-2)$ pour $n \geq 2$.

On s'intéresse maintenant à la somme des nombres de couples après les $n \in \mathbb{N}$ premières saisons :

$$S(n) = \sum_{i=0}^{n} F(i)$$

1. *Observez les valeurs de $F(n)$ et $S(n)$, puis conjecturez une formule les mettant en relation.*
2. *Démontrez votre conjecture par récurrence.*

□