

Éléments de Logique Formelle et du Raisonnement Mathématique : Partiel

Stéphane Devismes

3 mars 2026

2 pages

Total : 90 points

Durée : 1h30

Documents autorisés : une feuille recto verso de notes manuscrites format A4.

Le barème est *indicatif*, les points correspondent au nombre de minutes nécessaires pour réaliser les exercices.

L'épreuve sera notée sur 90 points.

Le résultat d'une question peut être admis pour s'en servir dans la suite de l'énoncé.

Les exercices peuvent être traités dans l'ordre de votre choix à condition de les numéroté clairement.

Exercice 1 (Arbre, table de vérité, formes normales (14 points))

Soit A la formule $a \Rightarrow b \wedge c \Leftrightarrow \neg c \Rightarrow \neg a$.

1. Donnez la formule stricte associée à A . (1 point)
2. Donnez la représentation arbre de A . (1 point)
3. Donnez la table de vérité de A . (10 points)
4. À partir de la table de vérité de A , déduisez une forme normale disjonctive de A . (1 point)
5. À partir de la table de vérité de A , déduisez une forme normale conjonctive de A . (1 point)

□

Exercice 2 (Modèles et formes normales, exercice de TD, 26 points) Soit A la formule suivante :

$$(((a \Rightarrow \neg b) \Leftrightarrow \neg c) \wedge (c \vee d)) \wedge (a \Leftrightarrow d).$$

1. Construisez, par simplification de formule, la forme normale conjonctive de A . (détaillez) (9 points)
2. Construisez, par simplification de formule, la forme normale disjonctive de A . (détaillez) (9 points)
3. A est-elle une tautologie ? (justifiez) (4 points)
4. A est-elle une contradiction ? (justifiez) (4 points)

□

Exercice 3 (Formalisation, 30 points) Fort de sa longue expérience, votre professeur de logique vous donne les informations suivantes :

- Un étudiant valide son année si et seulement s'il a au moins 10 de moyenne.
- Si un étudiant va en cours et en TD, il a au moins 10 de moyenne.
- Si un étudiant ne va pas en cours, il a moins de 10 de moyenne.
- Si un étudiant ne va pas en TD, il a moins de 10 de moyenne.

Pouvez-vous conclure que tout étudiant qui valide son année va en cours et en TD ?

Pour répondre à cette question, vous devez adopter la démarche suivante.

1. Formalisez les quatre hypothèses ainsi que la conclusion. (12.5 points)

Pour cela, vous utiliserez les variables suivantes :

- v : « Un étudiant valide son année »,
- d : « Un étudiant a au moins 10 de moyenne »,
- c : « Un étudiant va en cours », et
- t : « Un étudiant va en TD »,

2. Énoncez formellement la question posée. (2.5 points)

3. Répondez à la question en justifiant votre réponse par simplification de formule. (15 points)

□

Exercice 4 (Connecteur complet, 20 points) Considérons l'opérateur binaire $\nrightarrow$ tel que $x \nrightarrow y$ est vrai si et seulement si x est vrai et y est faux.

1. Donnez la table de vérité de $\nrightarrow$. (3 points)

2. Donnez deux formules distinctes équivalentes à $x \nrightarrow y$ en utilisant les connecteurs habituels de la logique propositionnelle. (2 points)

3. Démontrez que l'ensemble $\{1, \nrightarrow\}$ est complet en montrant comment il permet d'exprimer les connecteurs $\neg$, $\wedge$ et $\vee$.¹ (15 points)

□

Exercice 5 (Bonus pour ceux qui viennent en cours, 10 points) Prouvez par résolution que l'ensemble de clauses $\{\bar{c}, b + c, a + \bar{b} + c, \bar{a} + \bar{b}\}$ est contradictoire.

□

1. Nous avons vu en TD que l'ensemble $\{\neg, \wedge, \vee\}$ est complet.