Éléments de Logique Formelle et du Raisonnement Mathématique : Examen

Stéphane Devismes

4 mai 2025
2 pages
Total : 90 points
Durée : 1h30

Documents autorisés : une feuille recto verso de notes manuscrites format A4.
Le barème est *indicatif*, les points correspondent au nombre de minutes nécessaires pour réaliser les exercices.
L'épreuve sera notée sur 90 points.
Le résultat d'une question peut être admis pour s'en servir dans la suite de l'énoncé.
Les exercices peuvent être traités dans l'ordre de votre choix à condition de les numéroter clairement.

Exercice 1 (Résolution (15 points))
On considère les formules suivantes :

$$\{\ a \Leftrightarrow b,\ b \Leftrightarrow c,\ \neg(a \Leftrightarrow c)\ \}$$

Transformez ces formules en un ensemble de clauses équivalentes, puis démontrez par résolution que cet ensemble de clauses est insatisfaisable. □

Exercice 2 (Formalisation et résolution, Exercice de TD, 30 points)
Considérons les hypothèses suivantes :

1. *Si Pierre rate son tournoi alors Pierre sera déprimé.*
2. *S'il fait beau alors Pierre ira à la piscine.*
3. *Si Pierre ne va pas à la piscine il sera déprimé.*
4. *À la piscine, Pierre ne s'entraîne pas.*
5. *Pierre ratera son tournoi s'il ne s'entraîne pas.*

Nous souhaitons démontrer que des hypothèses précédentes, on peut déduire la conclusion suivante :
— *Pierre sera déprimé.*
Vous procéderez comme suit :

Tout d'abord, vous utiliserez les variables propositionnelles ci-dessous.
— *t : Pierre rate son tournoi.*
— *d : Pierre sera déprimé.*
— *b : il fait beau.*
— *p : Pierre ira à la piscine.*
— *e : Pierre ne s'entraine pas.*

Ensuite, vous respecterez les étapes ci-dessous.
— *Formalisez les hypothèses et la négation de la conclusion.* *(18 points)*
— *Déduisez de vos énoncés formels un ensemble de clauses équivalent.* *(2 points)*
— *Prouvez qu'il est correct de déduire la conclusion à partir des hypothèses en démontrant avec une preuve par résolution que l'ensemble de clauses est contradictoire.* *(10 points)*
□

Exercice 3 (Preuve par Récurrence, 20 points) *Soit* Γ *un ensemble de clauses. Un littéral de* Γ *est un littéral d'une clause de* Γ*. Montrez, par récurrence, que toute clause déduite de* Γ *à l'aide d'une preuve par résolution ne comporte que des littéraux de* Γ*.*

Indication *: Vous pourrez considérer une clause* B_n *déduite de* Γ *à l'aide de la preuve* $B_1, \ldots, B_n$ *(avec* $n \geq 1$*).*

□

Exercice 4 (Formalisation au premier ordre (15 points))

On cherche à modéliser un plan de table, c'est-à-dire comment les personnes sont installées pour le repas. On utilisera les symboles suivants :

— $Voisin(x, y)$ *signifie que* x *est assis à côté de* y *;*

— $Ami(x, y)$ *signifie que* x *et* y *sont amis.*

À l'aide de ces symboles, exprimez par des formules du premier ordre les énoncés suivants :

1. *Les personnes qui sont assises côte-à-côte sont toutes amies.* *(5 points)*
2. *Personne n'est assis tout seul.* *(5 points)*
3. *On ne peut pas être assis à côté de soi-même.* *(5 points)*

□

Exercice 5 (Expansions (10 points))

Trouvez, par la méthode des expansions, des contre-modèles des formules suivantes :

1. $\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x) \Rightarrow \exists x (P(x) \wedge Q(x))$ *(5 points)*
2. $\exists x \exists y (P(x, y) \wedge \neg(x = y)) \Rightarrow \forall x \forall y P(x, y)$ *(5 points)*

Indication *: vous pouvez vous contenter de construire des 2-expansions.*

□