# Éléments de Logique Formelle et du Raisonnement Mathématique : Rattrapage

Stéphane Devismes

18 juin 2026
2 pages
Total : 120 points
Durée : 2h00

Documents autorisés : une feuille recto verso de notes manuscrites format A4.
Le barème est *indicatif*, les points correspondent au nombre de minutes nécessaires pour réaliser les exercices. L'épreuve sera notée sur 120 points.
Le résultat d'une question peut être admis pour s'en servir dans la suite de l'énoncé.
Les exercices peuvent être traités dans l'ordre de votre choix à condition de les numéroter clairement.

**Exercice 1 (Modèles et formes normales (20 points))**
*Soit $A$ la formule propositionnelle $(a \vee b \Rightarrow \neg c) \wedge (d \Rightarrow \neg a \vee c)$.*

1. *Donnez la formule stricte équivalente à $A$.* *(1 point)*
2. *Déterminez, par simplification de formule, une forme normale disjonctive de $A$ (détaillez votre calcul).* *(8 points)*
3. *Déterminez, par simplification de formule, une forme normale conjonctive de $A$ (détaillez votre calcul).* *(8 points)*
4. *Donnez un modèle de $A$ et justifiez la réponse sans utiliser de table de vérité.* *(1,5 points)*
5. *Donnez un contre-modèle de $A$ et justifiez la réponse sans utiliser de table de vérité.* *(1,5 points)*

□

**Exercice 2 (Preuve par résolution, exercice de TD (25 points))**
*En utilisant la résolution, montrez que chacun des ensembles de formules suivants est insatisfaisable.*

- $\{a, a \Rightarrow b, \overline{b}\}$. *(5 points)*
- $\{a + b, \overline{a} + c, \overline{a} + \overline{d}, d + \overline{c}, \overline{b} + a\}$. *(10 points)*
- $\{a + b + c, \overline{a} + b, \overline{b} + c, \overline{c} + a, \overline{a} + \overline{b} + \overline{c}\}$. *(10 points)*

□

**Exercice 3 (Formalisation et Résolution Propositionnelle (40 points))**

*Charles explique à sa mère Elisabeth sa recette pour réussir sa vie avec Camilla :*

- *« J'offre des fleurs à Camilla uniquement depuis que nous sommes mariés et le jour de la saint Valentin, qui plus est. »*
- *« Si je lui offre des fleurs, Camilla est heureuse. »*
- *« Depuis que je suis marié à Camilla, si elle est heureuse, alors je suis heureux et je passe une bonne soirée. »*

*Ainsi, il conclut :*

- *« Depuis que je suis marié à Camilla, lorsque je suis malheureux ou lorsque je ne passe pas une bonne soirée (ou les deux à la fois) c'est que ce n'est pas le jour de la saint Valentin. »*

*Questions :*

1. *Formalisez les trois hypothèses et la conclusion émises par Charles en utilisant les variables suivantes :*

   *$f$ signifie « Charles offre des fleurs à Camilla »*

   *$m$ signifie « Camilla et Charles sont mariés »*

   *$v$ signifie « C'est le jour de la saint Valentin »*

   *$h$ signifie « Camilla est heureuse »*

   *$j$ signifie « Charles est heureux »*

   *$s$ signifie « Charles passe une bonne soirée »*

   **Indication :** *« uniquement » se traduit par une équivalence.* *(20 points)*

2. *Transformez la conjonction des trois hypothèses et de la négation de la conclusion en un ensemble de clauses équivalentes.* *(10 points)*
3. *Démontrez, par résolution, que la conclusion de Charles se déduit de ses hypothèses.* *(10 points)*

□

**Exercice 4 (Formalisation au premier ordre (15 points))**

*Considérons l'interprétation usuelle de l'arithmétique des entiers naturels enrichie des relations suivantes*[1] *:*

- *$Pair(x)$ signifie que $x$ est un entier naturel pair,*
- *$Divisible(x, y)$ signifie que l'entier naturel $x$ est divisible par l'entier naturel $y$ et*
- *$Premier(x)$ signifie que l'entier naturel $x$ est un nombre premier.*

*Exprimez par des formules fermées en logique du premier ordre les énoncés suivants :*

- *La somme de deux entiers naturels supérieurs à 1 est inférieure ou égale à leur produit.* *(5 points)*
- *Tout entier naturel est pair si et seulement s'il est divisible par 2.* *(5 points)*
- *2 est le seul entier naturel pair qui soit premier.* *(5 points)*

□

**Exercice 5 (Formule du premier ordre et Expansions (20 points))**

*Pour chacune des formules suivantes :*

- $\forall x \forall y(R(x, y) \Rightarrow R(y, x))$
- $\forall x \forall y(P(x, y) \Rightarrow x = y) \Rightarrow \exists x P(x, x)$

1. *Donnez la signature correspondante.*
2. *Déterminez un contre-modèle de la formule par la méthode des expansions.*

□

1. Le domaine de l'interprétation est donc $\mathbb{N}$.