Correction exercices 9 à 13

Comparaison de 2 échantillons appariés

9. Ventoline

On a mesuré la capacité respiratoire de 5 personnes, avant et après un traitement par ventoline.

Avant	Après
3.8	4.1
3.6	3.7
3.5	4.2
3.6	3.5
3.7	4.2

Peut on conclure à un effet du traitement ?

(On suppose que l’on respecte les conditions d’application des tests paramétriques).

9. Ventoline

On a mesuré la capacité respiratoire de 5 personnes, avant et après un traitement par ventoline.

n< 30 et conditions tests paramétriques respectées → test t de Student

pour échantillons appariés (mêmes individus mesurés 2 fois)

$$\boxed{\begin{array}{l} H_0 : \overline{d} = 0 \\ H_1 : \overline{d} \neq 0 \end{array}}$$

	Avant	Après	di
	3.8	4.1	0.3
	3.6	3.7	0.1
	3.5	4.2	0.7
	3.6	3.5	-0.1
	3.7	4.2	0.5
moy	3.64	3.94	0.3

$$\mathbf{T}_{\text{obs}} = \frac{\overline{\boldsymbol{d}}}{\boldsymbol{S(d)}/\sqrt{\boldsymbol{N}}}$$

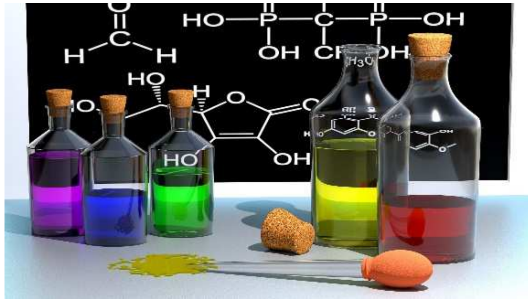
$$= \frac{\mathbf{0.3}}{\mathbf{0.32}/\sqrt{\mathbf{5}}} = \mathbf{2.12}$$

Pour un risque α = 0.05 et n-1 = 4 ddl ➔ $T_{\text{théo}} = 2.77$

$|T_{obs}| < |T_{\text{théo}}|$ on ne peut pas rejeter H_0 ni conclure à un effet du traitement

10. Les electrodes

On mesure le pH de 6 solutions avec 2 types d'électrodes.

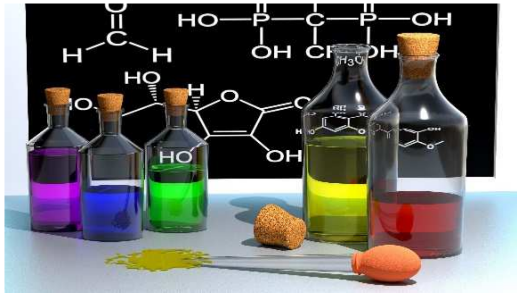


	Sol. 1	Sol. 2	Sol. 3	Sol. 4	Sol. 5	Sol. 6
Electrode 1	7.78	7.74	7.84	7.8	7.76	7.62
Electrode 2	7.82	7.87	7.96	7.89	7.99	7.8

Peut on rejeter l'hypothèse suivante ? :
« le changement d'électrode n'apporte pas de changement dans l'évaluation du pH »

(On décide d'utiliser un test paramétrique)

10. Les electrodes



On mesure le pH de 6 solutions avec 2 types d'électrodes.
Peut on rejeter l'hypothèse suivante ? : « le changement d'électrode n'apporte pas de changement dans l'évaluation du pH »

On a: Echantillons appariés, $n_A = n_N < 30$ → test paramétrique de Student

Condition: di doit avoir une distribution normale (sinon test non param WMW)

$H_0 = |\overline{x_1} - \overline{x_2}| = 0$ (soit $\overline{d} = 0$)
$H_1 = |\overline{x_1} - \overline{x_2}| \neq 0$ (soit $\overline{d} \neq 0$)

	Sol. 1	Sol. 2	Sol. 3	Sol. 4	Sol. 5	Sol. 6	Moyenne
Electrode 1	7.78	7.74	7.84	7.8	7.76	7.62	7.76
Electrode 2	7.82	7.87	7.96	7.89	7.99	7.8	7.89
di	-0.04	-0.13	-0.12	-0.09	-0.23	-0.18	-0.13

$$t = \frac{|\overline{d}|}{\frac{\widehat{\sigma}_d}{\sqrt{n}}}$$

$$\overline{d} = \frac{\sum d_i}{N} = \frac{-0.79}{6} = -0.13$$

$t_{théo}$ =2.6 avec ddl=n-1=5 et $\alpha = 0.05$

$$\widehat{\sigma_d}^2 = \frac{\sum(di - \overline{d})^2}{n-1} = \frac{(0.09)^2 + (0)^2 + (0.01)^2 + (0.04)^2 + (0.1)^2 + (-0.05)^2}{6-1} = \frac{0.02}{5} = 0.004$$

$$\widehat{\sigma}_d = \sqrt{\widehat{\sigma_d}^2} = \sqrt{0.004} = 0.063$$

$$t_{obs} = \frac{0.13}{\frac{0.063}{\sqrt{6}}} = \frac{0.13}{0.026} = 5$$

$|t_{obs}| > t_{théo}$ → rejet de H_0, l'électrode choisie influe sur l'évaluation du pH.

Effectuer ce test sous R

```
> electrode1 = c(7.78, 7.74, 7.84, 7.80, 7.76, 7.62)
> electrode2 = c(7.82, 7.87, 7.96, 7.89, 7.99, 7.80)
> di = electrode1-electrode2
> shapiro.test(di)

        Shapiro-Wilk normality test

data:  di
W = 0.98711, p-value = 0.981

> t.test(electrode1, electrode2, paired=T)

        Paired t-test

data:  electrode1 and electrode2
t = -4.8311, df = 5, p-value = 0.004752
alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 -0.20172517 -0.06160816
sample estimates:
mean of the differences
             -0.1316667
```

11. Les ophiures

On mesure expérimentalement la nutrition d'ophiures pendant 3 h en conditions de faibles et fortes turbulences du milieu après 1 h de pause.

Individu	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Faibles turbulences	10.1	8.7	7.9	9.2	8.7	12	11	12.5	12
Fortes turbulences	4.2	5.6	8.6	6.8	9.9	6.2	5.1	4.9	5.6

La turbulence a-t-elle un effet significatif sur la nutrition des ophiures ?

(On suppose que les conditions des tests paramétriques ne sont pas respectées)

11. Les ophiures

La turbulence a-t-elle un effet significatif sur la nutrition des ophiures ?

Individu	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Faibles turbulences	10.1	8.7	7.9	9.2	8.7	12	11	12.5	12
Fortes turbulences	4.2	5.6	8.6	6.8	9.9	6.2	5.1	4.9	5.6

di	5.9	3.1	-0.7	2.4	-1.2	5.8	5.9	7.6	6.4
rang |di|	6.5	4	1	3	2	5	6.5	9	8
signe	+	+	-	+	-	+	+	+	+

H0 : $T+ \approx T-$
H1 : $T+ \neq T-$

$T_+ = 6.5 + 4 + 3 + 5 + 6.5 + 9 + 8 = 42$

$T_- = 1 + 2 = 3 \leftarrow \mathbf{T_{w\_obs}}$

On vérifie l'égalité suivante pour ne pas faire d'erreur:

$T_+ + T_- = n(n+1)/2$ avec n : effectif des « d_i » <u>non nuls</u>

→ 42 + 3 = (9*10)/2 = 45 → ok

$T_{w\_théo}$=5 avec α=0.05, n=nb di ≠ 0

$T_{w\_obs} < T_{w\_théo}$ ➔ Rejet H_0, accepte H_1; la turbulence a un effet significatif sur la nutrition des ophiures

Effectuer ce test sous R

```
> Fortes <- c (10.1, 8.7, 7.9, 9.2, 8.7, 12.0, 11.0, 12.5, 12.0)
> Faibles <- c (4.2, 5.6, 8.6, 6.8, 9.9, 6.2, 5.1, 4.9, 5.6)
>
> ### cette fois ci il faut préciser que les données sont appariées :
> ### ajout de "paired = TRUE "
> wilcox.test(Fortes,Faibles,paired=TRUE)

        Wilcoxon signed rank test

data:  Fortes and Faibles
V = 42, p-value = 0.01953
alternative hypothesis: true location shift is not equal to 0
```

12. Apport en fer

L'effet d'un régime alimentaire végétarien sur l'apport en fer quotidien été étudié chez dix femmes australiennes.

L'apport quotidien en fer (mg j^{-1}) a été mesuré, chez les sujets, avant et deux semaines après l'adoption d'un régime végétarien :

Omnivore	Végétarien
11.2	9.3
7.6	10.5
8.4	11.7
9.8	12.4
10.9	8.9
11	10.8
12.2	14.2
8.1	10
10	9.5
9.8	9.7

(On considère la normalité non respectée)

Sur la base de ces résultats, peut on penser que l'adoption d'un régime végétarien modifie significativement les apports en fer?

12. Apport en fer

Choix du test : échantillons de faibles effectifs appariés

→ non paramétrique: Wilcoxon pour petits échantillons

Omnivore	Végétarien	|di|	rang	signe
11.2	9.3	1.9	4.5	+
7.6	10.5	2.9	9	-
8.4	11.7	3.3	10	-
9.8	12.4	2.6	8	-
10.9	8.9	2	6.5	+
11	10.8	0.2	2	+
12.2	14.2	2	6.5	-
8.1	10	1.9	4.5	-
10	9.5	0.5	3	+
9.8	9.7	0.1	1	+

H0 : T+ = T-

H1 : T+ ≠ T-

Somme des rangs positifs: T+ = 17

Somme des rangs négatifs: T- = 38

T_{Wobs} = 17 (valeur minimale entre T+ et T-)

$T_{Wthéo}$ =8 (table pour un α = 0.05)

n	Two-Tailed Test	
	$\alpha = .05$	$\alpha = .01$
5	--	--
6	0	--
7	2	--
8	3	0
9	5	1
10	8	3
11	10	5

T_{obs}> $T_{théo}$: On ne rejette pas H_0

l'adoption d'un régime végétarien ne mène pas à des carences en fer

Effectuer ce test sous R

```
omni<-c(11.2,7.6,8.4,9.8,10.9,11,12.2,8.1,10,9.8)
vege<-c(9.3,10.5,11.7,12.4,8.9,10.8,14.2,10,9.5,9.7)
```

```
wilcox.test(omni, vege, paired = T)
```

```
        Wilcoxon signed rank test with continuity correction

data:  omni and vege
V = 16.5, p-value = 0.2842
alternative hypothesis: true location shift is not equal to 0
```

13. Bioremédiation

On dispose de 13 clones de Peuplier dont on a mesuré à deux instants différents (Août et Novembre) la concentration en Aluminium dans le bois (µg/g) au sein d'une zone polluée :

(On considère la normalité respectée)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
A	8.1	10	16.5	13.6	9.5	8.3	18.3	13.3	7.9	8.1	8.9	12.6	13.4
N	11.2	16.3	15.3	15.6	10.5	15.5	12.7	11.1	19.9	20.4	14.2	12.7	36.8

Est-ce-que la concentration en Aluminium dans le bois de Peuplier diffère significativement entre ces deux périodes ?

13. Bioremédiation

On a: Echantillons appariés, $n_A = n_N < 30$ → test paramétrique de Student

Condition: di doit avoir une distribution normale (sinon test non param WMW)

$H_0 = |\overline{x_A} - \overline{x_N}| = 0$ (soit $\overline{\boldsymbol{d}} = 0$)
$H_1 = |\overline{x_A} - \overline{x_N}| \neq 0$ (soit $\overline{\boldsymbol{d}} \neq 0$)

$$t = \frac{|\overline{d}|}{\frac{\hat{\sigma}_d}{\sqrt{n}}}$$

$t_{théo}$: **2.18** pour ddl= n-1 = 12, et α = 0.05 (bilat)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	Moyenne
A	8.1	10	16.5	13.6	9.5	8.3	18.3	13.3	7.9	8.1	8.9	12.6	13.4	11.4
N	11.2	16.3	15.3	15.6	10.5	15.5	12.7	11.1	19.9	20.4	14.2	12.7	36.8	16.3
d_i	**-3.1**	**-6.3**	**1.2**	**-2**	**-1**	**-7.2**	**5.6**	**2.2**	**-12**	**-12.3**	**-5.3**	**-0.1**	**-23.4**	**-4.9**

Moyenne des di : $\overline{\boldsymbol{d}} = \frac{\sum d_i}{n} = \frac{-63.7}{13} = -4.9$; vérification → $\overline{\boldsymbol{d}} = \overline{x_A} - \overline{x_N} = 11.4 - 16.3 = -4.9$

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{\boldsymbol{d}}{}^2 = \frac{\sum(\boldsymbol{di}-\overline{\boldsymbol{d}})^2}{\boldsymbol{n}-\mathbf{1}} = \frac{(1.8)^2+(-1.4)^2+(6.1)^2+(2.9)^2+(3.9)^2+(-2.3)^2+(10.5)^2+(7.1)^2+(-7.1)^2+(-7.4)^2+(-0.4)^2+(4.8)^2+(-18.5)^2}{13-1} = \frac{702.6}{12} = \mathbf{58.5}$$

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{\boldsymbol{d}} = \sqrt{\hat{\sigma}_d{}^2} = \sqrt{58.5} = \mathbf{7.6}$$

$$t_{obs} = \frac{|\overline{\boldsymbol{d}}|}{\frac{\hat{\boldsymbol{\sigma}}_d}{\sqrt{n}}} = \frac{4.9}{\frac{7.6}{\sqrt{13}}} = \frac{4.9}{2.1} = \mathbf{2.3}$$

| t_{obs} | > $t_{théo}$ → rejet de H_0, acceptation de H_1

Il y a donc une différence de concentration en aluminium dans le bois de peuplier entre les deux mois.

Effectuer ce test sous R

```
Aout<-c(8.1,10,16.5,13.6,9.5,8.3,18.3,13.3,7.9,8.1,8.9,12.6,13.4)
Novembre<-c(11.2,16.3,15.3,15.6,10.5,15.5,12.7,11.1,19.9,20.4,14.2,12.7,36.8)

di<-Aout-Novembre

shapiro.test(di)
```

```
        Shapiro-Wilk normality test

data:  di
W = 0.92667, p-value = 0.3081
```

```
t.test(Aout, Novembre, paired = T)
```

```
        Paired t-test

data:  Aout and Novembre
t = -2.3089, df = 12, p-value = 0.03956
alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 -9.5239348 -0.2760652
sample estimates:
mean of the differences
                   -4.9
```