

## Examen de statistiques du 19/12/2019, M1AETPF

**Durée :** 120 min.

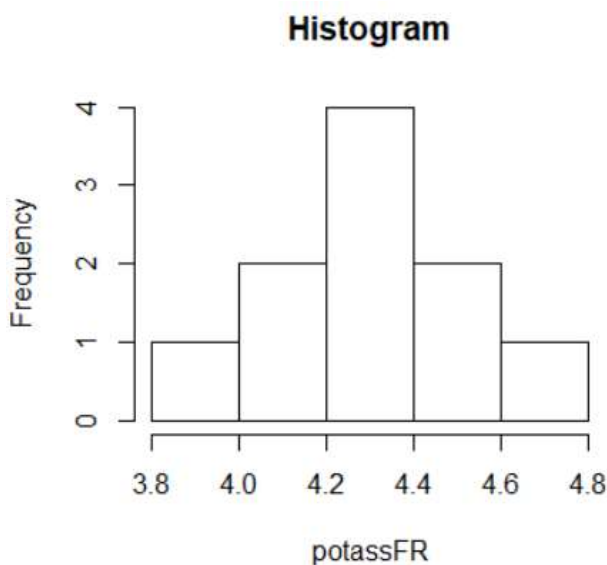
**Consignes :** Veillez à bien **formuler vos hypothèses** quand cela est nécessaire et à bien **expliquer votre démarche en justifiant vos choix en matière de test**. Veillez également à fournir tous les **résultats intermédiaires** qui vous permettent de conclure à chaque exercice. Une attention toute particulière sera portée quant à la **clarté** et à la **concision** de vos réponses. **Réalisez l'ensemble de vos tests sur la base d'un seuil de significativité à 5%.**

**NB :** Les tables de valeurs critiques ainsi que les principales formules vues en cours sont mises à votre disposition à la fin de ce document. La **calculatrice** et **documents** sous format **papier** sont autorisés.

### EXERCICE 1

On mesure la concentration en potassium (mmol/L) dans le plasma sanguin (taux de kaliémie) chez 10 patients tirés au hasard dans la population française. Les résultats d'analyse du plasma sanguin donnent les concentrations suivantes :

```
potassFR <- c (4.46, 4.19, 4.42, 4.39, 4.31, 3.95, 4.23, 4.21, 4.05, 4.66)
```



Pour une population d'individus sains, le taux moyen de kaliémie de référence est de 4.25 mmol/L.

### Questions :

1. Est-ce que l'échantillon de 10 patients présente un taux moyen de kaliémie représentatif de la population de référence (cf. individus sains) ?
2. Ecrire la/les ligne(s) de code que vous utiliseriez-vous pour réaliser ce test sous R.
3. Définir ce qu'est un intervalle de confiance. Calculez l'intervalle de confiance à 95% de la moyenne de la population (IC95%), et utilisez cet intervalle pour confirmer/justifier votre conclusion à la question 1.

## EXERCICE 2

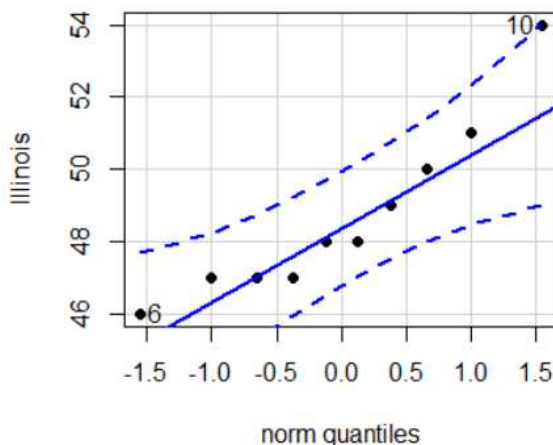
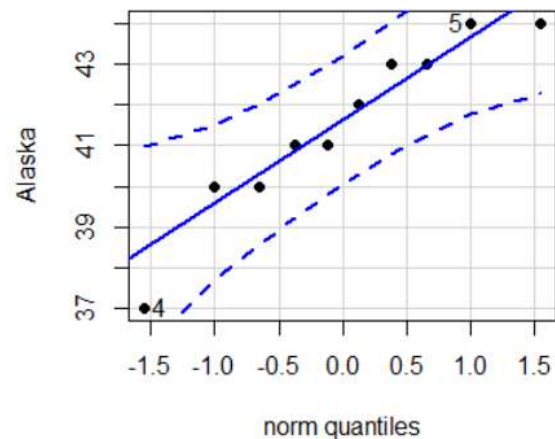
Un chercheur a mesuré la longueur des ailes antérieures droites (mm) de *Papilio glaucus* mâles échantillonnés en Alaska et en Illinois à la même période. Les résultats sont les suivant :

```
Alaska <- c(42, 41, 41, 37, 44, 43, 43, 40, 40, 44)
```

```
Illinois <- c(51, 48, 49, 48, 47, 46, 47, 47, 50, 54)
```

### Shapiro-wilk normality test

```
data: Alaska  
w = 0.92224, p-value = 0.376
```



### Shapiro-wilk normality test

```
data: Illinois  
w = 0.88602, p-value = 0.1529
```

### Questions :

1. Quels tests (paramétrique et non-paramétrique) pouvez-vous a priori utiliser pour comparer ces échantillons ?
2. Après avoir vérifié et justifié les conditions d'utilisation du test approprié, répondre aux questions suivantes :
  - Existe-t-il une différence de développement de la longueur des ailes des mâles de *Papilio glaucus* entre les régions échantillonnées ?
  - Peut-on dire que le climat (plus froid) de l'Alaska entraîne un retard significatif de développement des ailes de *Papilio glaucus* mâles par rapport à l'Illinois ?
3. Ecrire la/les ligne(s) de code que vous utiliseriez pour réaliser ces tests sous R.

### EXERCICE 3

Douze malades présentant des symptômes d'anxiété reçoivent un tranquillisant.

On évalue l'état du malade avant et après traitement par un indice X que le médecin traitant calcule d'après les réponses à une série de questions. Si le traitement est efficace, l'indice X doit diminuer.

Les valeurs de cet indice sont les suivantes :

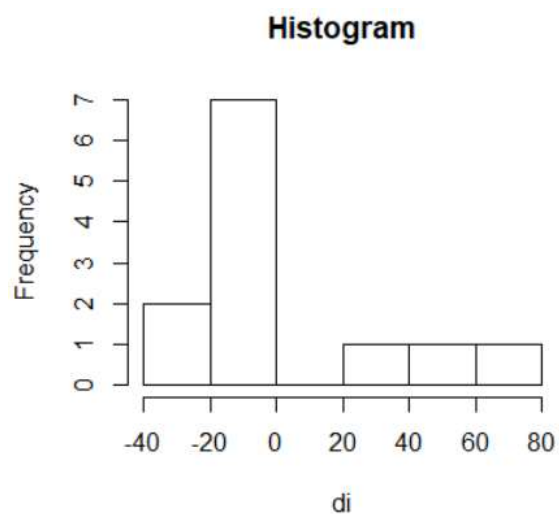
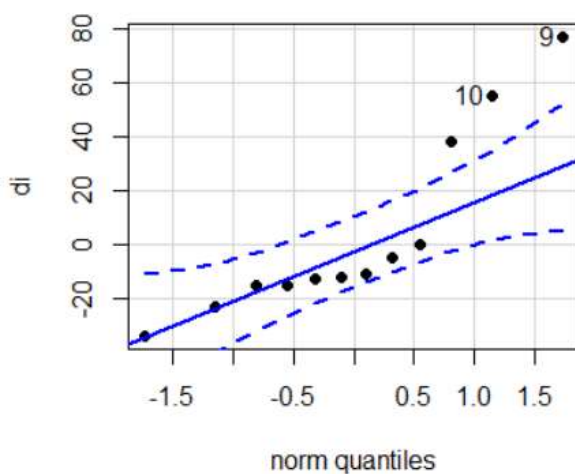
Avant <- c (102, 122, 83, 67, 98, 114, 116, 118, 41, 52, 116, 123)

Après <- c (68, 122, 78, 105, 83, 101, 104, 95, 118, 107, 105, 108)

Nous avons par ailleurs les résultats suivant :

#### Shapiro-wilk normality test

```
data: di
w = 0.81457, p-value = 0.01379
```



#### Questions :

1. Quels tests (paramétrique et non-paramétrique) pouvez-vous a priori utiliser pour comparer ces échantillons ?
2. Après avoir vérifié et justifié les conditions d'utilisation du test approprié, conclure quant à l'efficacité du traitement.
3. Ecrire la/les ligne(s) de code que vous utiliseriez pour réaliser ces tests sous R.

## EXERCICE 4

Pour étudier l'influence de l'exposition sur la croissance en mètres de conifères, on a mesuré 10 arbres sur 4 versants opposés (notés V1, V2, V3 et V4). Ces données ont été rentrées dans un tableau de données, nommé « data », dont voici la structure :

```
data <- read.csv ("data.csv", header=TRUE, sep=";")
```

```
str(data)
```

```
data.frame': 40 obs. of 2 variables:
 $ croissance: num 23.4 24.4 24.6 24.9 25 26.2 26.3 26.8 26.9 27 ...
 $ versant : Factor w/ 4 levels "V1","V2","V3",...: 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 ..
```

### Questions :

1. Quelle est la nature des variables étudiées ? Sont-elles appariées ? Quelle variable correspond à la variable : a) dépendante (réponse) et b) indépendante (explicative) ?
2. Quel type de graphique pourriez-vous utiliser afin de visualiser de façon synthétique la distribution de vos données de croissance au sein et entre les quatre versants échantillonnés ?
3. Quels tests (paramétrique et non-paramétrique) pouvez-vous a priori utiliser pour comparer ces échantillons ? Quelles sont leurs conditions d'application ? Avec quels outils (graphiques et numériques) pouvez-vous vérifier si ces conditions sont respectées ?
4. En admettant que les conditions d'application du test paramétrique sont remplies, et au vu des données ci-dessous, peut-on dire que la croissance est la même sur les quatre versants ? si non, lesquels diffèrent des autres et comment ? Justifiez vos réponses en vous appuyant sur les valeurs fournies dans les sorties R ci-après et sur vos connaissances du fonctionnement des tests utilisés.

```
aov_data <- aov (data$croissance ~ data$versant)
```

```
summary(aov_data)
```

```
              Df Sum Sq Mean Sq F value    Pr(>F)
data$versant   3   397.3    132.4    34.84 9.61e-11 ***
Residuals     36   136.8      3.8
```

```
---
```

```
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

TukeyHSD (aov\_data)

Tukey multiple comparisons of means  
95% family-wise confidence level

Fit: aov(formula = data\$croissance ~ data\$versant)

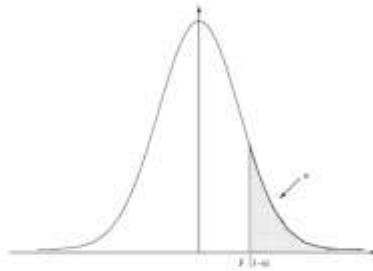
\$`data\$versant`

	diff	lwr	upr	p adj
v2-v1	-0.96	-3.308236	1.38823566	0.6911892
v3-v1	-2.41	-4.758236	-0.06176434	0.0424405
v4-v1	5.88	3.531764	8.22823566	0.0000004
v3-v2	-1.45	-3.798236	0.89823566	0.3576185
v4-v2	6.84	4.491764	9.18823566	0.0000000
v4-v3	8.29	5.941764	10.63823566	0.0000000



## QUANTILES DE LA LOI NORMALE CENTREE REDUITE (LNCR)

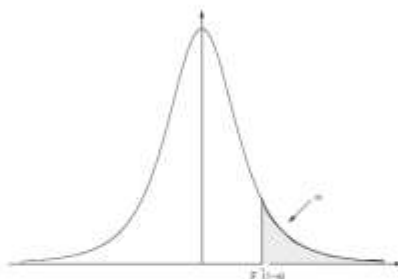
Pour une valeur  $\alpha \in ]0; 0.5[$ , la table ci-dessous renvoie la valeur  $F^{-1}(1 - \alpha)$  de la fonction quantile  $F^{-1}$  de la loi normale centrée réduite au point  $1 - \alpha$ .



$\alpha$	0.000	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009
0.00	$\infty$	3.0902	2.8782	2.7478	2.6521	2.5758	2.5121	2.4573	2.4089	2.3656
0.01	2.3263	2.2904	2.2571	2.2262	2.1973	2.1701	2.1444	2.1201	2.0969	2.0749
0.02	2.0537	2.0335	2.0141	1.9954	1.9774	1.9600	1.9431	1.9268	1.9110	1.8957
0.03	1.8808	1.8663	1.8522	1.8384	1.8250	1.8119	1.7991	1.7866	1.7744	1.7624
0.04	1.7507	1.7392	1.7279	1.7169	1.7060	1.6954	1.6849	1.6747	1.6646	1.6546
0.05	1.6449	1.6352	1.6258	1.6164	1.6072	1.5982	1.5893	1.5805	1.5718	1.5632
0.06	1.5548	1.5464	1.5382	1.5301	1.5220	1.5141	1.5063	1.4985	1.4909	1.4833
0.07	1.4758	1.4684	1.4611	1.4538	1.4466	1.4395	1.4325	1.4255	1.4187	1.4118
0.08	1.4051	1.3984	1.3917	1.3852	1.3787	1.3722	1.3658	1.3595	1.3532	1.3469
0.09	1.3408	1.3346	1.3285	1.3225	1.3165	1.3106	1.3047	1.2988	1.2930	1.2873
0.10	1.2816	1.2759	1.2702	1.2646	1.2591	1.2536	1.2481	1.2426	1.2372	1.2319
0.11	1.2265	1.2212	1.2160	1.2107	1.2055	1.2004	1.1952	1.1901	1.1850	1.1800
0.12	1.1750	1.1700	1.1650	1.1601	1.1552	1.1503	1.1455	1.1407	1.1359	1.1311
0.13	1.1264	1.1217	1.1170	1.1123	1.1077	1.1031	1.0985	1.0939	1.0893	1.0848
0.14	1.0803	1.0758	1.0714	1.0669	1.0625	1.0581	1.0537	1.0494	1.0450	1.0407
0.15	1.0364	1.0322	1.0279	1.0237	1.0194	1.0152	1.0110	1.0069	1.0027	0.9986
0.16	0.9945	0.9904	0.9863	0.9822	0.9782	0.9741	0.9701	0.9661	0.9621	0.9581
0.17	0.9542	0.9502	0.9463	0.9424	0.9385	0.9346	0.9307	0.9269	0.9230	0.9192
0.18	0.9154	0.9116	0.9078	0.9040	0.9002	0.8965	0.8927	0.8890	0.8853	0.8816
0.19	0.8779	0.8742	0.8705	0.8669	0.8633	0.8596	0.8560	0.8524	0.8488	0.8452
0.20	0.8416	0.8381	0.8345	0.8310	0.8274	0.8239	0.8204	0.8169	0.8134	0.8099
0.21	0.8064	0.8030	0.7995	0.7961	0.7926	0.7892	0.7858	0.7824	0.7790	0.7756
0.22	0.7722	0.7688	0.7655	0.7621	0.7588	0.7554	0.7521	0.7488	0.7454	0.7421
0.23	0.7388	0.7356	0.7323	0.7290	0.7257	0.7225	0.7192	0.7160	0.7128	0.7095
0.24	0.7063	0.7031	0.6999	0.6967	0.6935	0.6903	0.6871	0.6840	0.6808	0.6776
0.25	0.6745	0.6713	0.6682	0.6651	0.6620	0.6588	0.6557	0.6526	0.6495	0.6464
0.26	0.6433	0.6403	0.6372	0.6341	0.6311	0.6280	0.6250	0.6219	0.6189	0.6158
0.27	0.6128	0.6098	0.6068	0.6038	0.6008	0.5978	0.5948	0.5918	0.5888	0.5858
0.28	0.5828	0.5799	0.5769	0.5740	0.5710	0.5681	0.5651	0.5622	0.5592	0.5563
0.29	0.5534	0.5505	0.5476	0.5446	0.5417	0.5388	0.5359	0.5330	0.5302	0.5273
0.30	0.5244	0.5215	0.5187	0.5158	0.5129	0.5101	0.5072	0.5044	0.5015	0.4987
0.31	0.4959	0.4930	0.4902	0.4874	0.4845	0.4817	0.4789	0.4761	0.4733	0.4705
0.32	0.4677	0.4649	0.4621	0.4593	0.4565	0.4538	0.4510	0.4482	0.4454	0.4427
0.33	0.4399	0.4372	0.4344	0.4316	0.4289	0.4261	0.4234	0.4207	0.4179	0.4152
0.34	0.4125	0.4097	0.4070	0.4043	0.4016	0.3989	0.3961	0.3934	0.3907	0.3880
0.35	0.3853	0.3826	0.3799	0.3772	0.3745	0.3719	0.3692	0.3665	0.3638	0.3611
0.36	0.3585	0.3558	0.3531	0.3505	0.3478	0.3451	0.3425	0.3398	0.3372	0.3345
0.37	0.3319	0.3292	0.3266	0.3239	0.3213	0.3186	0.3160	0.3134	0.3107	0.3081
0.38	0.3055	0.3029	0.3002	0.2976	0.2950	0.2924	0.2898	0.2871	0.2845	0.2819
0.39	0.2793	0.2767	0.2741	0.2715	0.2689	0.2663	0.2637	0.2611	0.2585	0.2559
0.40	0.2533	0.2508	0.2482	0.2456	0.2430	0.2404	0.2378	0.2353	0.2327	0.2301
0.41	0.2275	0.2250	0.2224	0.2198	0.2173	0.2147	0.2121	0.2096	0.2070	0.2045
0.42	0.2019	0.1993	0.1968	0.1942	0.1917	0.1891	0.1866	0.1840	0.1815	0.1789
0.43	0.1764	0.1738	0.1713	0.1687	0.1662	0.1637	0.1611	0.1586	0.1560	0.1535
0.44	0.1510	0.1484	0.1459	0.1434	0.1408	0.1383	0.1358	0.1332	0.1307	0.1282
0.45	0.1257	0.1231	0.1206	0.1181	0.1156	0.1130	0.1105	0.1080	0.1055	0.1030
0.46	0.1004	0.0979	0.0954	0.0929	0.0904	0.0878	0.0853	0.0828	0.0803	0.0778
0.47	0.0753	0.0728	0.0702	0.0677	0.0652	0.0627	0.0602	0.0577	0.0552	0.0527
0.48	0.0502	0.0476	0.0451	0.0426	0.0401	0.0376	0.0351	0.0326	0.0301	0.0276
0.49	0.0251	0.0226	0.0201	0.0175	0.0150	0.0125	0.0100	0.0075	0.0050	0.0025

## QUANTILES DES LOI DE STUDENT

Pour un certain degré de liberté  $n$  et pour certaine valeur de  $\alpha$ , la table ci-dessous renvoie la valeur  $F^{-1}(1 - \alpha)$  de la fonction quantile  $F^{-1}$  de la loi de Student à  $n$  degrés de liberté au point  $1 - \alpha$ .

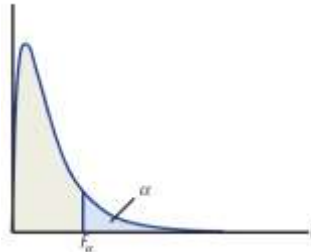


$n \backslash \alpha$	0.45	0.3	0.2	0.1	0.05	0.025	0.01	0.001
1	0.158	0.727	1.376	3.078	6.314	12.706	31.821	318.309
2	0.142	0.617	1.061	1.886	2.920	4.303	6.965	22.327
3	0.137	0.584	0.978	1.638	2.353	3.182	4.541	10.215
4	0.134	0.569	0.941	1.533	2.132	2.776	3.747	7.173
5	0.132	0.559	0.920	1.476	2.015	2.571	3.365	5.893
6	0.131	0.553	0.906	1.440	1.943	2.447	3.143	5.208
7	0.130	0.549	0.896	1.415	1.895	2.365	2.998	4.785
8	0.130	0.546	0.889	1.397	1.860	2.306	2.896	4.501
9	0.129	0.543	0.883	1.383	1.833	2.262	2.821	4.297
10	0.129	0.542	0.879	1.372	1.812	2.228	2.764	4.144
11	0.129	0.540	0.876	1.363	1.796	2.201	2.718	4.025
12	0.128	0.539	0.873	1.356	1.782	2.179	2.681	3.930
13	0.128	0.538	0.870	1.350	1.771	2.160	2.650	3.852
14	0.128	0.537	0.868	1.345	1.761	2.145	2.624	3.787
15	0.128	0.536	0.866	1.341	1.753	2.131	2.602	3.733
16	0.128	0.535	0.865	1.337	1.746	2.120	2.583	3.686
17	0.128	0.534	0.863	1.333	1.740	2.110	2.567	3.646
18	0.127	0.534	0.862	1.330	1.734	2.101	2.552	3.610
19	0.127	0.533	0.861	1.328	1.729	2.093	2.539	3.579
20	0.127	0.533	0.860	1.325	1.725	2.086	2.528	3.552
21	0.127	0.532	0.859	1.323	1.721	2.080	2.518	3.527
22	0.127	0.532	0.858	1.321	1.717	2.074	2.508	3.505
23	0.127	0.532	0.858	1.319	1.714	2.069	2.500	3.485
24	0.127	0.531	0.857	1.318	1.711	2.064	2.492	3.467
25	0.127	0.531	0.856	1.316	1.708	2.060	2.485	3.450
26	0.127	0.531	0.856	1.315	1.706	2.056	2.479	3.435
27	0.127	0.531	0.855	1.314	1.703	2.052	2.473	3.421
28	0.127	0.530	0.855	1.313	1.701	2.048	2.467	3.408
29	0.127	0.530	0.854	1.311	1.699	2.045	2.462	3.396
30	0.127	0.530	0.854	1.310	1.697	2.042	2.457	3.385
40	0.126	0.529	0.851	1.303	1.684	2.021	2.423	3.307
80	0.126	0.526	0.846	1.292	1.664	1.990	2.374	3.195
120	0.126	0.526	0.845	1.289	1.658	1.980	2.358	3.160
$\infty$	0.126	0.524	0.842	1.282	1.645	1.96	2.327	3.091



## QUANTILES DES LOIS DE FISHER

Pour un certain degré de liberté  $n_1$  au numérateur (colonnes) et un certain degré de liberté  $n_2$  au dénominateur (lignes), la table ci-dessous renvoie la valeur  $F^{-1}(1-(0.05/2))$  de la fonction quantile notée  $F^{-1}$  de la loi de Fisher à  $n_1$  et  $n_2$  degrés de liberté au point  $1-(0.05/2)$ .



Numerator Degrees of Freedom

Denominator Degrees of Freedom

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	647.7890	799.5000	864.1630	899.5833	921.8479	937.1111	948.2169	956.6562	963.2846
2	38.5063	39.0000	39.1655	39.2484	39.2982	39.3315	39.3552	39.3730	39.3869
3	17.4434	16.0441	15.4392	15.1010	14.8848	14.7347	14.6244	14.5399	14.4731
4	12.2179	10.6491	9.9792	9.6045	9.3645	9.1973	9.0741	8.9796	8.9047
5	10.0070	8.4336	7.7636	7.3879	7.1464	6.9777	6.8531	6.7572	6.6811
6	8.8131	7.2599	6.5988	6.2272	5.9876	5.8198	5.6955	5.5996	5.5234
7	8.0727	6.5415	5.8898	5.5226	5.2852	5.1186	4.9949	4.8993	4.8232
8	7.5709	6.0595	5.4160	5.0526	4.8173	4.6517	4.5286	4.4333	4.3572
9	7.2093	5.7147	5.0781	4.7181	4.4844	4.3197	4.1970	4.1020	4.0260
10	6.9367	5.4564	4.8256	4.4683	4.2361	4.0721	3.9498	3.8549	3.7790
11	6.7241	5.2559	4.6300	4.2751	4.0440	3.8807	3.7586	3.6638	3.5879
12	6.5538	5.0959	4.4742	4.1212	3.8911	3.7283	3.6065	3.5118	3.4358
13	6.4143	4.9653	4.3472	3.9959	3.7667	3.6043	3.4827	3.3880	3.3120
14	6.2979	4.8567	4.2417	3.8919	3.6634	3.5014	3.3799	3.2853	3.2093
15	6.1995	4.7650	4.1528	3.8043	3.5764	3.4147	3.2934	3.1987	3.1227
16	6.1151	4.6867	4.0768	3.7294	3.5021	3.3406	3.2194	3.1248	3.0488
17	6.0420	4.6189	4.0112	3.6648	3.4379	3.2767	3.1556	3.0610	2.9849
18	5.9781	4.5597	3.9539	3.6083	3.3820	3.2209	3.0999	3.0053	2.9291
19	5.9216	4.5075	3.9034	3.5587	3.3327	3.1718	3.0509	2.9563	2.8801
20	5.8715	4.4613	3.8587	3.5147	3.2891	3.1283	3.0074	2.9128	2.8365
21	5.8266	4.4199	3.8188	3.4754	3.2501	3.0895	2.9686	2.8740	2.7977
22	5.7863	4.3828	3.7829	3.4401	3.2151	3.0546	2.9338	2.8392	2.7628
23	5.7498	4.3492	3.7505	3.4083	3.1835	3.0232	2.9023	2.8077	2.7313
24	5.7166	4.3187	3.7211	3.3794	3.1548	2.9946	2.8738	2.7791	2.7027
25	5.6864	4.2909	3.6943	3.3530	3.1287	2.9685	2.8478	2.7531	2.6766
26	5.6586	4.2655	3.6697	3.3289	3.1048	2.9447	2.8240	2.7293	2.6528
27	5.6331	4.2421	3.6472	3.3067	3.0828	2.9228	2.8021	2.7074	2.6309
28	5.6096	4.2205	3.6264	3.2863	3.0626	2.9027	2.7820	2.6872	2.6106
29	5.5878	4.2006	3.6072	3.2674	3.0438	2.8840	2.7633	2.6686	2.5919
30	5.5675	4.1821	3.5894	3.2499	3.0265	2.8667	2.7460	2.6513	2.5746
40	5.4239	4.0510	3.4633	3.1261	2.9037	2.7444	2.6238	2.5289	2.4519
60	5.2856	3.9253	3.3425	3.0077	2.7863	2.6274	2.5068	2.4117	2.3344
120	5.1523	3.8046	3.2269	2.8943	2.6740	2.5154	2.3948	2.2994	2.2217
∞	5.0239	3.6889	3.1161	2.7858	2.5665	2.4082	2.2875	2.1918	2.1136



## TABLE DE MANN-WHITNEY

Valeurs critiques ( $U_{crit}$ ) à comparer avec la valeur observée ( $U_{obs}$ ) à partir de vos 2 échantillons pour un test **bilatéral** au seuil  $\alpha = 0.05$  ou  $0.01$ .

NB :  $n_1$  et  $n_2$  représentent le nombre d'observations dans chaque échantillon.

$n_2$	$\alpha$	$n_1$																	
		3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
3	.05	--	0	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8
	.01	--	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	2	2	2	2	3	3
4	.05	--	0	1	2	3	4	4	5	6	7	8	9	10	11	11	12	13	14
	.01	--	--	0	0	0	1	1	2	2	3	3	4	5	5	6	6	7	8
5	.05	0	1	2	3	5	6	7	8	9	11	12	13	14	15	17	18	19	20
	.01	--	--	0	1	1	2	3	4	5	6	7	7	8	9	10	11	12	13
6	.05	1	2	3	5	6	8	10	11	13	14	16	17	19	21	22	24	25	27
	.01	--	0	1	2	3	4	5	6	7	9	10	11	12	13	15	16	17	18
7	.05	1	3	5	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34
	.01	--	0	1	3	4	6	7	9	10	12	13	15	16	18	19	21	22	24
8	.05	2	4	6	8	10	13	15	17	19	22	24	26	29	31	34	36	38	41
	.01	--	1	2	4	6	7	9	11	13	15	17	18	20	22	24	26	28	30
9	.05	2	4	7	10	12	15	17	20	23	26	28	31	34	37	39	42	45	48
	.01	0	1	3	5	7	9	11	13	16	18	20	22	24	27	29	31	33	36
10	.05	3	5	8	11	14	17	20	23	26	29	33	36	39	42	45	48	52	55
	.01	0	2	4	6	9	11	13	16	18	21	24	26	29	31	34	37	39	42
11	.05	3	6	9	13	16	19	23	26	30	33	37	40	44	47	51	55	58	62
	.01	0	2	5	7	10	13	16	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48
12	.05	4	7	11	14	18	22	26	29	33	37	41	45	49	53	57	61	65	69
	.01	1	3	6	9	12	15	18	21	24	27	31	34	37	41	44	47	51	54

## TABLE DE MANN-WHITNEY

Valeurs critiques ( $U_{crit}$ ) à comparer avec la valeur observée ( $U_{obs}$ ) à partir de vos 2 échantillons pour un test **unilatéral** au seuil  $\alpha = 0.05$  ou  $0.01$ .

NB :  $n_1$  et  $n_2$  représentent le nombre d'observations dans chaque échantillon.

$n_2$	$\alpha$	$n_1$																	
		3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
3	.05	0	0	1	2	2	3	4	4	5	5	6	7	7	8	9	9	10	11
	.01	--	0	0	0	0	0	1	1	1	2	2	2	3	3	4	4	4	5
4	.05	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	14	15	16	17	18
	.01	--	--	0	1	1	2	3	3	4	5	5	6	7	7	8	9	9	10
5	.05	1	2	4	5	6	8	9	11	12	13	15	16	18	19	20	22	23	25
	.01	--	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
6	.05	2	3	5	7	8	10	12	14	16	17	19	21	23	25	26	28	30	32
	.01	--	1	2	3	4	6	7	8	9	11	12	13	15	16	18	19	20	22
7	.05	2	4	6	8	11	13	15	17	19	21	24	26	28	30	33	35	37	39
	.01	0	1	3	4	6	7	9	11	12	14	16	17	19	21	23	24	26	28
8	.05	3	5	8	10	13	15	18	20	23	26	28	31	33	36	39	41	44	47
	.01	0	2	4	6	7	9	11	13	15	17	20	22	24	26	28	30	32	34
9	.05	4	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48	51	54
	.01	1	3	5	7	9	11	14	16	18	21	23	26	28	31	33	36	38	40
10	.05	4	7	11	14	17	20	24	27	31	34	37	41	44	48	51	55	58	62
	.01	1	3	6	8	11	13	16	19	22	24	27	30	33	36	38	41	44	47
11	.05	5	8	12	16	19	23	27	31	34	38	42	46	50	54	57	61	65	69
	.01	1	4	7	9	12	15	18	22	25	28	31	34	37	41	44	47	50	53
12	.05	5	9	13	17	21	26	30	34	38	42	47	51	55	60	64	68	72	77
	.01	2	5	8	11	14	17	21	24	28	31	35	38	42	46	49	53	56	60

### Wilcoxon signed rank Test for paired observations

Calculate the SUM of the RANKS of the smaller of the NEGATIVE (or POSITIVE) ranks & compare to WILCOXON table (small samples  $n < 25$ ) or NORMAL distribution (if larger  $n$ ).

n	Two-Tailed Test		One-Tailed Test	
	$\alpha = .05$	$\alpha = .01$	$\alpha = .05$	$\alpha = .01$
5	--	--	0	--
6	0	--	2	--
7	2	--	3	0
8	3	0	5	1
9	5	1	8	3
10	8	3	10	5
11	10	5	13	7
12	13	7	17	9
13	17	9	21	12
14	21	12	25	15
15	25	15	30	19
16	29	19	35	23
17	34	23	41	27
18	40	27	47	32
19	46	32	53	37
20	52	37	60	43
21	58	42	67	49
22	65	48	75	55
23	73	54	83	62
24	81	61	91	69
25	89	68	100	76
26	98	75	110	84
27	107	83	119	92
28	116	91	130	101
29	126	100	140	110
30	137	109	151	120