Intervalles de confiance de la moyenne

Application 1 :

On a mesuré la taille de 40 étudiants de l'UPJV.

$\overline{x}$ = 178.0 cm

S^2 = 50.4

1. On veut calculer les intervalles de confiance à 95% et 99% de la moyenne (μ) de la pop. des étudiants de l'UPJV.

Quelle formule doit on utiliser ?

A : $$IC_{1-\alpha}[\mu] = \overline{x} \pm Z_{\alpha} * \frac{S}{\sqrt{n}}$$

✓ **A**

B : $$IC_{1-\alpha}[\mu] = \overline{x} \pm t_{n-1,\alpha} * \frac{S}{\sqrt{n}}$$

Intervalles de confiance de la moyenne

Application 1 :

On a mesuré la taille de 40 étudiants de l'UPJV.

$\bar{x}$ = 178.0 cm

S^2 = 50.4

2. Quelles sont les valeurs de Z que l'on peut lire dans la table de la LNRC pour des seuils de risque de 5 et 1% ?

	α	0.000	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006
1% / 2 →	0.00	∞	3.0902	2.8782	2.7478	2.6521	$\boxed{2.5758}$	2.5121
	0.01	2.3263	2.2904	2.2571	2.2262	2.1973	2.1701	2.1444
5% / 2 →	0.02	2.0537	2.0335	2.0141	1.9954	1.9774	$\boxed{1.9600}$	1.9431
	0.03	1.8808	1.8663	1.8522	1.8384	1.8250	1.8119	1.7991
	0.04	1.7507	1.7392	1.7279	1.7169	1.7060	1.6954	1.6849
	0.05	1.6449	1.6352	1.6258	1.6164	1.6072	1.5982	1.5893
	0.06	1.5548	1.5464	1.5382	1.5301	1.5220	1.5141	1.5063
	0.07	1.4758	1.4684	1.4611	1.4538	1.4466	1.4395	1.4325
	0.08	1.4051	1.3984	1.3917	1.3852	1.3787	1.3722	1.3658
	0.09	1.3408	1.3346	1.3285	1.3225	1.3165	1.3106	1.3047
	0.10	1.2816	1.2759	1.2702	1.2646	1.2591	1.2536	1.2481

✓ **B**

✓ **F**

Intervalles de confiance de la moyenne

Application 1 :

On a mesuré la taille de 40 étudiants de l'UPJV.

$\bar{x}$ = 178.0 cm

S^2 = 50.4

3. Quelles sont les intervalles de confiance à 95 et 99 % de μ ?

Pour IC 95 % :

A : [79.22 ; 276.78]

B : [164.09 ; 191.91]

C : [177.65 ; 178.35]

D : [175.80 ; 180.20] ✓ **D**

Pour IC 99 % :

E : [48.18 ; 307.82]

F : [159.71 ; 196.29]

G : [175.11 ; 180.89] ✓ **G**

H : [177.54 ; 178.46]

Intervalles de confiance de la moyenne

Application 1 :

On a mesuré la taille de 40 étudiants de l'UPJV.

$\bar{x}$ = 178.0 cm

S^2 = 50.4

3. Quelles sont les intervalles de confiance à 95 et 99 % de µ ?

$$IC_{1-\alpha}[\mu] = \bar{x} \pm Z_\alpha * \frac{S}{\sqrt{n}}$$

Erreur standard **E.S. = 1.12**

✓ **D** **Pour IC 95 % :** **$178 \pm 1.96 * 1.12$ = [175.80 ; 180.20]**

✓ **G** **Pour IC 99 % :** **$178 \pm 2.57 * 1.12$ = [175.11 ; 180.89]**

Intervalles de confiance de la moyenne

Application 2 : Et si on réduit l'effectif ??

n = **10** étudiants

$\overline{x}$ = 178.0 cm

S^2 = 50.4

1. On veut calculer l'intervalle de confiance à 95 % de µ.

Quelle formule doit on utiliser ?

A : $$IC_{1-\alpha}[\mu] = \overline{x} \pm Z_{\alpha} * \frac{S}{\sqrt{n}}$$

B : $$IC_{1-\alpha}[\mu] = \overline{x} \pm t_{n-1,\alpha} * \frac{S}{\sqrt{n}}$$

✓ **B**

<u>L'échantillon est trop petit</u> pour pouvoir utiliser les valeurs de la loi normale.

La moyenne va donc être distribuée approximativement selon la loi de Student.

Intervalles de confiance de la moyenne

Application 2 : Et si on réduit l'effectif ??

n = **10** étudiants

$\bar{x}$ = 178.0 cm

S^2 = 50.4

2. Quel est l'intervalle de confiance à 95 % de µ ?

Pour IC 95 % :

A : [177.60 ; 178.40]

B : [172.92 ; 183.08] ✓ **B**

C : [177.67 ; 178.33]

D : [173.88 ; 182.12]

Intervalles de confiance de la moyenne

Application 2 : Et si on réduit l'effectif ??

n = **10** étudiants

$\overline{x}$ = 178.0 cm

S^2 = 50.4

2. Quel est l'intervalle de confiance à 95 % de µ ?

$$IC_{1-\alpha}[\mu] = \overline{x} \pm t_{n-1,\alpha} * \frac{S}{\sqrt{n}}$$

E.S.= 2.24

178 ± 2.262 * 2.24

→ IC de µ à 95 % : [172.92 ; 183.08]

α/2 = 0.025

Ddl = n-1 = 9 →

n \ α	0.45	0.3	0.2	0.1	0.05	0.025	0.01
1	0.158	0.727	1.376	3.078	6.314	12.706	31.821
2	0.142	0.617	1.061	1.886	2.920	4.303	6.965
3	0.137	0.584	0.978	1.638	2.353	3.182	4.541
4	0.134	0.569	0.941	1.533	2.132	2.776	3.747
5	0.132	0.559	0.920	1.476	2.015	2.571	3.365
6	0.131	0.553	0.906	1.440	1.943	2.447	3.143
7	0.130	0.549	0.896	1.415	1.895	2.365	2.998
8	0.130	0.546	0.889	1.397	1.860	2.306	2.896
9	0.129	0.543	0.883	1.383	1.833	$\boxed{2.262}$	2.821

Intervalles de confiance de la moyenne

Quelle remarque pouvez-vous faire quant à l'effet de la taille de l'échantillon sur la précision de l'estimation?

IC à 95 % avec **n = 40 :** [175.8 ; 180.2] → **Etendue ~ 4** cm

IC à 95 % avec **n = 10 :** [172.92 ; 183.08] → **Etendue ~ 10** cm

L'étendue quantifie la précision de l'estimation :

- Plus l'étendue est faible, plus l'estimation est précise
- Plus n est grand, plus l'estimation est précise

Bilan : intervalles de confiance (I.C.)

- Un I.C. d'un paramètre est une **estimation *par intervalle*** de ce paramètre (fourchette).

- On associe un ***risque*** (α) aux estimations par I.C. : *Il est fixé a priori, généralement proche 0 et au* ***maximum de 5%*** *(ex: 0.05, 0.01 ou 0.001) (5% = standard)*

- **L'étendue** de l'IC est le reflet de la **précision** de l'estimation:

- Directement proportionnelle à l'écart-type de la variable mesurée → plus la dispersion sera grande dans l'échantillon, plus l'étendue de l'IC sera importante.

- Inversement proportionnelle à la taille *n* de l'échantillon → plus l'effectif sera grand, plus l'étendue de l'IC sera faible et donc l'estimation du paramètre précise.

Plan du cours

Partie 2. Introductions aux statistiques

1. De la variabilité dans les sciences de la vie

2. Statistiques descriptives

3. Vers les statistiques inférentielles

- Notion d’estimation
- Intervalles de confiance
- **Introduction aux tests statistiques**
- S’orienter dans les tests statistiques

Les tests d'hypothèses

En fonction de la problématique de départ et de la nature de la (des) variable(s) (cf Partie 1),

on pourra utiliser les tests d'hypothèses (= tests statistiques) pour….

VD qualitative : Comparer des fréquences observées et attendues

→ 1 échantillon *vs* référence ou entre échantillons

VD quantitative (*voire ordinale*) : Etudier des différences de moyennes (ou *médiane*)

→ 1 échantillon *vs* référence ou entre échantillons

Etudier la relation entre variables quantitatives ou qualitatives :

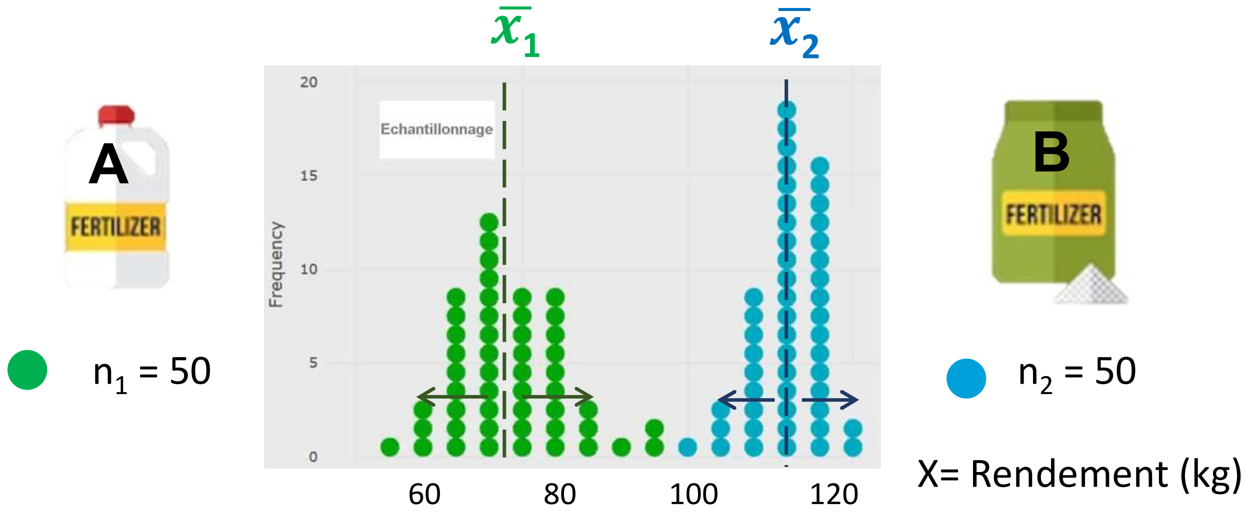
Dépendance, corrélation…

➔ PRENDRE UNE DECISION : Différences observées significatives ou dues au hasard ?

Les tests d'hypothèses

Ex : « Existe t'il 1 ≠ de rendement entre les parcelles traitées avec engrais A ou B? »

VD : *Rendement maïs (VA quanti. cont.),* ***VI*** *: Type engrais (quali. nom., modalités fixées)*



→ *Distribution: symétriques, proches normalité (loi de proba postulée)*

→ *Estimation paramètre pop. : $\mu_1 \approx \bar{x}_1$ et $\mu_2 \approx \bar{x}_2$ (ponctuelle + IC)*

ECQ la ≠ entre μ_1 et μ_2 est le reflet de l'effet du traitement (A vs B) ou est elle due au hasard de l'échantillonnage?

Les tests d'hypothèses

On réalise un test statistique qui nous permettra de se **décider entre deux hypothèses** mutuellement exclusives, **H_0 et H_1**, avec une certaine **marge d'erreur** (**risque α**).

- **Hypothèse nulle H_0 :** « Rien à signaler », pas de différence significative.
  Les ≠ observées sont explicables par les fluctuations d'échantillonnage.

→ **Formulée dans le but d'être rejetée**, mais admise a priori tout au long du test.
  Rejetée que si les observations la contredisent (bénéfice du doute).

- **Hypothèse alternative H_1 :** Les **différences** observées sont **significatives**
  Non explicables uniquement par les fluctuations d'échantillonnage (effet d'un facteur).

→ Celle que l'on **souhaite généralement démontrer.**

DECISION :
- Les observations sont compatibles avec H0 → **non rejet de H0**
- Les observations rendent H0 invraisemblable → **rejet de H0** et acceptation H1

Notion de risque

La décision de **rejeter ou non H0 n'est pas sans risques** → risques α et β

		Réalité (à jamais inconnue)	
		H0 est vraie	**H0 est fausse**
Décision	**H0 rejetée**	**MAUVAISE DECISION** Erreur de type I (α) : **proba. de rejeter H_0 quand H_0 est vraie**	**BONNE DECISION** **Puissance** ($1-\beta$) : proba. de rejeter H_0 quand H_0 est fausse
	H0 non rejetée	**BONNE DECISION** ($1-\alpha$) Proba. de ne pas rejeter H_0 quand H_0 est vraie	**MAUVAISE DECISION** Erreur de type II (β) : **proba. de ne pas rejeter H_0 quand H_0 est fausse** *Rarement calculable!*

puissance d'un test **: capacité de l'expérience à mettre en évidence une différence**

- augmente avec taille de l'échantillon
- diminue lorsque α diminue
- un test unilatéral est plus puissant qu'un test bilatéral
- un test paramétrique est plus puissant qu'un test non paramétrique

Notion de risque

H0 : ne pas être enceinte
H1 : être enceinte

		Réalité	
		H0 est vraie	**H0 est fausse**
Décision	**H0 rejetée**	 α	 $1-\beta$ (puissance)
	H0 non rejetée	 $1-\alpha$	 β

Notion de risque

En sciences, on souhaite **minimiser** le **risque α**, et on tolère au maximum un risque de 5%.

Le **seuil α est fixé a priori** (avant le test), généralement à 0.05, 0.01 ou 0.001.

Tous les tests statistiques fournissent une p value (« petit p »)… mais c'est quoi ?

C'est la probabilité, si H_0 vraie, d'obtenir le résultat observé sur l'échantillon (ou un résultat encore plus extrême) sous l'effet seul du hasard.

- Elle représente la probabilité, **d'après les observations,** de **rejeter à tort l'hypothèse nulle H_0** (erreur type I : **α**) → **calculée a posteriori** (à l'issue du test).

- Plus la p-value est petite, plus le risque de se tromper en rejetant H_0 est faible.

Pour un seuil de significativité α donné, on rejettera H_0 si $p < \alpha$.

Les étapes du test d'hypothèse

1. **Poser H_0** (supposée vraie) et **H_1**, et fixer le seuil de risque α (par défaut, α= 0.05).

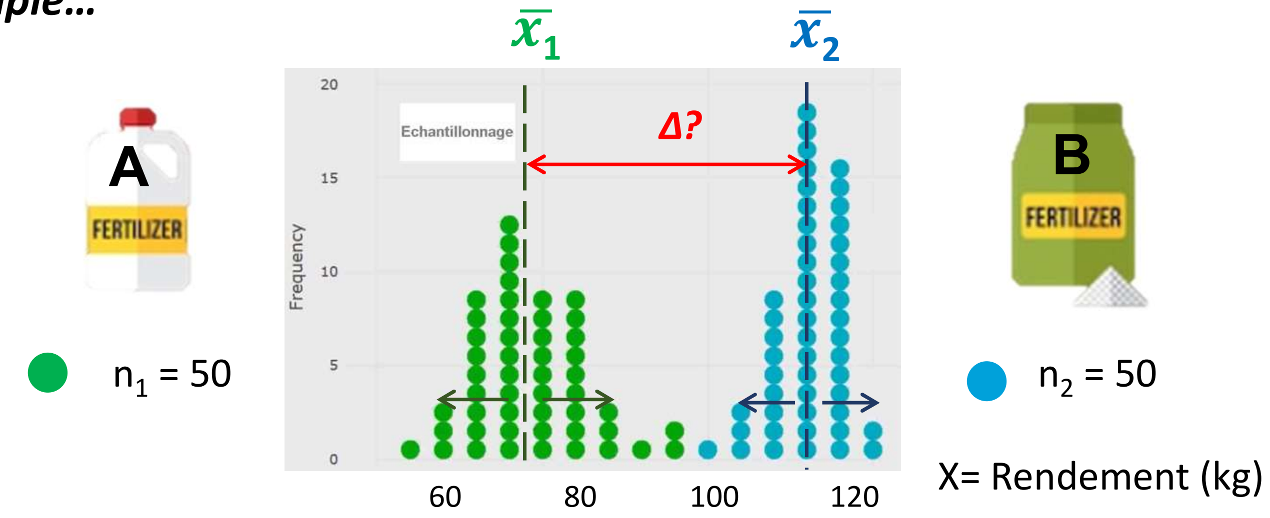
2. Choisir une **statistique de test* (St)**, jouant le rôle de variable de décision et calculer sa **gamme des résultats théoriques possibles sous H_0** pour le seuil α choisi.
→ 2 critères : connaitre sa distribution sous **H0,** être calculable à partir des données.

3. **Calculer** la valeur de la **statistique** de test **observée** (=St_{obs}) à partir du/des échantillon(s) et la **comparer** avec la **distribution théorique** de St sous H_0.
Calculer la **p-value** correspondant à l'observation et la comparer au seuil α fixé**.**

4. **Conclure** que H_0 est peu crédible (et donc la rejeter) si St_{obs} appartient à la **zone de rejet** de St sous H_0 et que la **p-value < α** (sinon H_0 reste crédible → non rejet).

La statistique de test

Retour à notre exemple…



St → Mesure de la **différence** ***Δ*** **entre les moyennes** des échantillons *($\bar{X}_1$ - $\bar{X}_2$)*

Dans quelle mesure cette différence s'éloigne significativement de 0 ?

+ la **différence** *Δ* est grande (s'éloigne de 0), <u>et</u> la **dispersion** (**S_1, S_2**) faible (peu/pas de recouvrement des distributions) ➔ + la **probabilité** qu'elle soit significative augmente.

NB : le **signe** de *Δ* nous renseignera sur le sens de la différence.

Détermination des zones de rejet

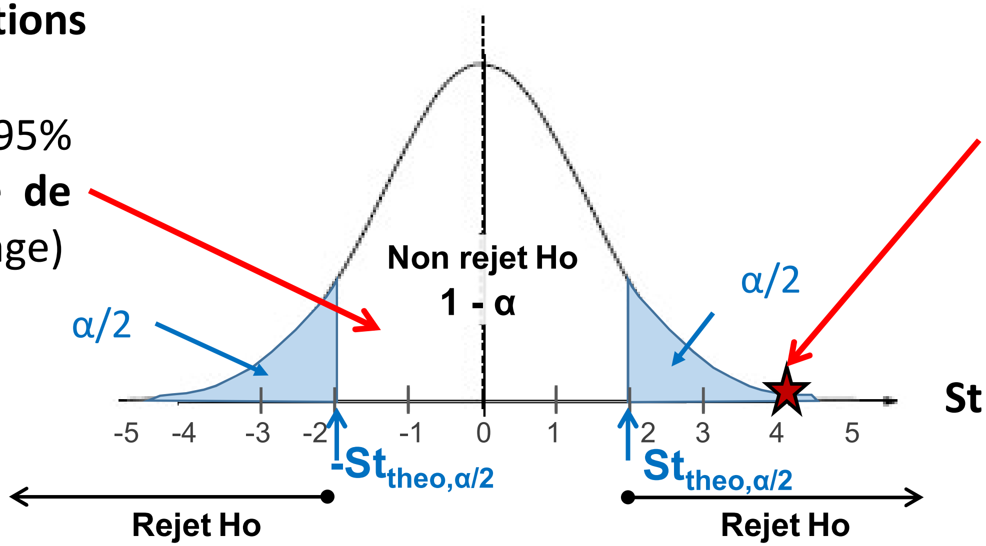
Connaissant la **distribution de la *St*** choisie, on peut calculer avec précision les gammes de valeurs extrêmes qui n'ont presque aucune chance d'être observées si H_0 est vraie.

Les zones de rejet et d'acceptation de H_0 sont délimitées par la/les valeurs théoriques **$St_{théo}$** qui correspondent un seuil α choisi sous H_0 (généralement 0.05) → ***Table statistique.***

Test bilatéral: 2 zones de rejet = **α/2** **<u>de part et d'autre</u>** de la distribution d'échantillonnage théorique de St sous H_0, encadrant la zone d'acceptation.

★ **= St_{obs} calculé à partir des observations**

Si H0 est vraie, alors St_{obs} doit, dans 95% des cas, être comprise dans la **zone de non rejet** (fluctuations d'échantillonnage)



Si St_{obs} tombe dans la **zone de rejet** alors on rejette H0 et **accepte H1**

$$H_1 : | St_{obs} | \geq | St_{theo,\, \alpha/2} |$$

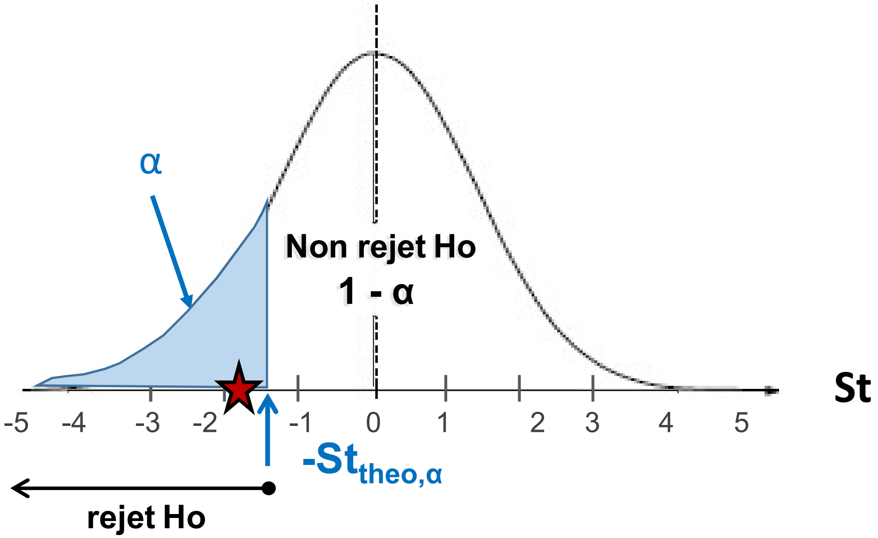
Détermination des zones de rejet

- **Test unilatéral**: on a **une seule zone de rejet** concentrant les 5% (pour = α 0.05) de valeurs les plus extrêmes **à gauche <u>ou</u> à droite** de la distribution de St sous H0 (bornée par 1 seule valeur critique de $St_{théo}$).

★ = St_{obs} **calculé à partir des observations**

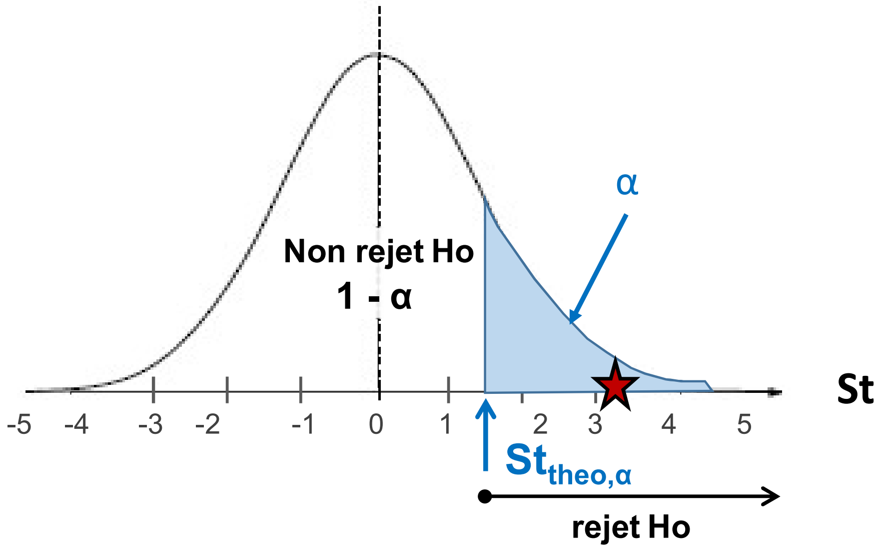
Test unilatéral à gauche

H1 : $St_{obs} \leq -St_{theo,\alpha}$



Test unilatéral à droite

H1 : $St_{obs} \geq St_{theo,\alpha}$



Test unilatéral ou bilatéral ?

Le **choix** d'effectuer un test unilatéral ou un bilatéral **dépend** de notre **hypothèse alternative** (scientifique), c'est-à-dire de notre motivation à vouloir rejeter H0.

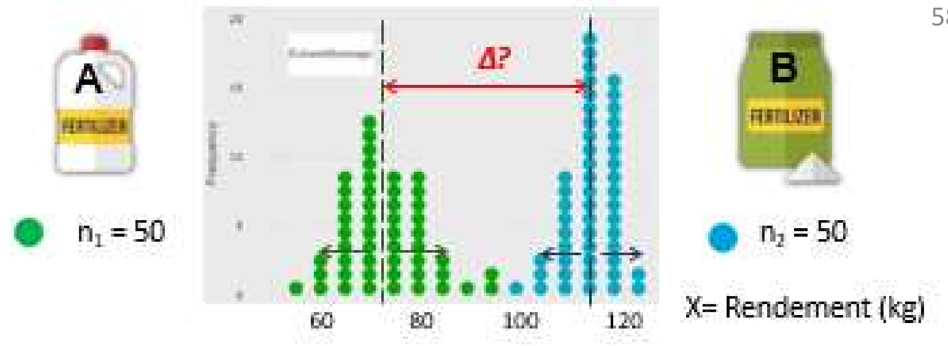
- Si on n'a **pas d'a priori** sur le sens de cette différence : le test est effectué en situation **bilatérale**. C'est la situation la plus courante.

H_0 : les moyennes de rendements sont équivalentes avec l'engrais A ou l'engrais B → $\mu_1 = \mu_2$
H_1 : les moyennes de rendements sont différentes : $\mu_1 \neq \mu_2$

- Si on croit à la **supériorité d'un traitement** par rapport à un autre et qu'on veut le vérifier, il faudra raisonner en terme de test **unilatéral**.

H_0 : les moyennes de rendements sont équivalentes avec l'engrais A ou l'engrais B → $\mu_1 = \mu_2$
H_1 : la moyenne de rendement avec l'engrais B est supérieure à celle avec A → $\mu_2 > \mu_1$

Conclusion ?

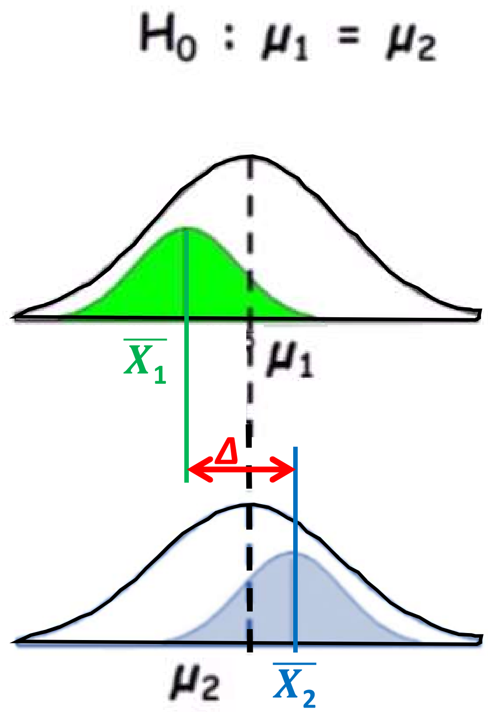


Non rejet de H0 (elle reste crédible) :
La différence est non **significative** : $\mu_1 \approx \mu_2$

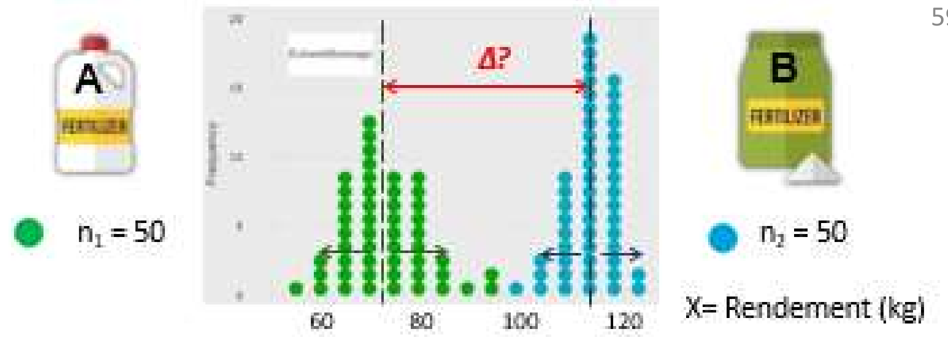
Les paramètres des 2 populations dont sont issus les échantillons sont équivalents ($\mu 1 \approx \mu 2$).

Les individus échantillonnés aléatoirement proviennent en réalité d'une unique grande population statistique.

Les différences observées ne sont que des variations aléatoires autour d'une moyenne commune (fluctuation d'échantillonnage).



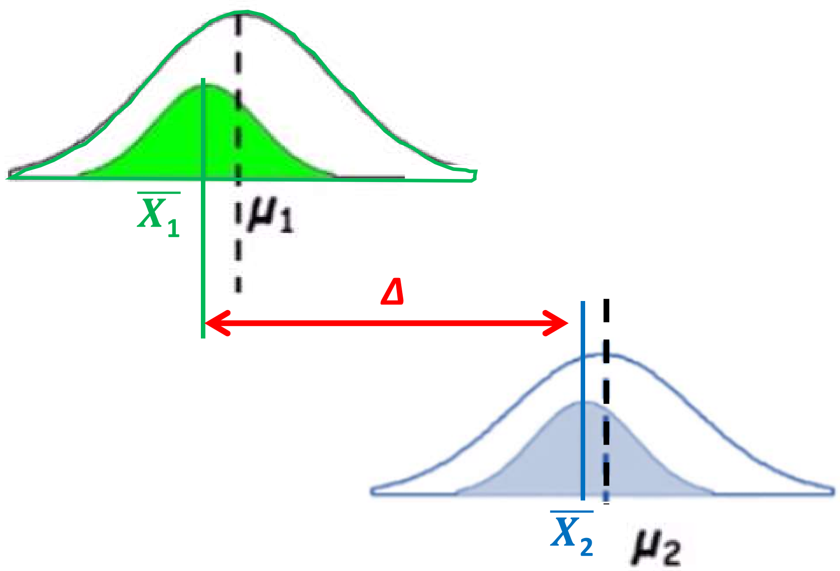
Conclusion ?



Rejet de H0 (peu crédible), **acceptation de H1**:
La différence est dite **significative** : $\mu_1 \neq \mu_2$

$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

La différence observée est tellement importante qu'elle n'a presque aucune chance d'être observée si H0 est vraie (c.a.d. sous l'effet seul du hasard).



Les 2 échantillons proviennent vraisemblablement de 2 populations distinctes de moyennes $\mu 1 \neq \mu 2$.

(effet du facteur principal -type d'engrais- sur la VD –rendement en maïs-)

Plan du cours

Partie 2. Introductions aux statistiques

1. De la variabilité dans les sciences de la vie

2. Statistiques descriptives

3. **Vers les statistiques inférentielles**

- Notion d’estimation
- Intervalles de confiance
- Introduction aux tests statistiques
- **S’orienter dans les tests statistiques**

S'orienter dans l'univers des tests d'hypothèse

Comment choisir le bon test ? **… en se posant les bonnes questions…**

- *Sur quoi porte la question de recherche ?*

(Relation entre variables, Comparaison entre échantillons, Prédiction…?)

- *Nature et rôle des variables (VD et VI)?*

- *Une ou plusieurs VI ? (voire VD)*

- *Nombre de groupes/échantillons à comparer ?*

- *Echantillons indépendants ou appariés ?*

(…) → De nombreux arbres/tableaux de décision existent, différents points de départ..

S’orienter dans l’univers des tests d’hypothèse

Ne pas perdre le Nord :

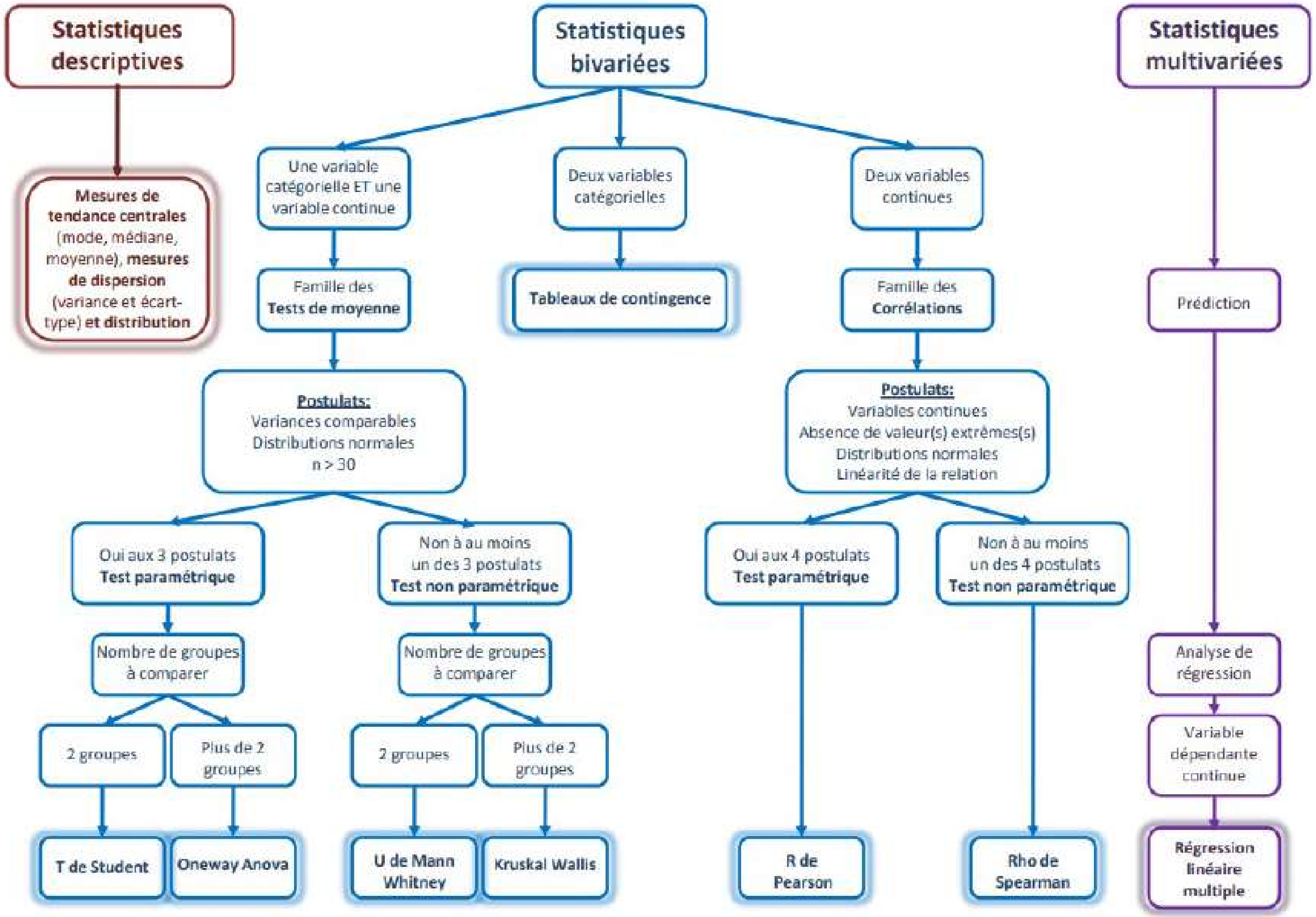
			Tests paramétriques	Tests non paramétriques
Tests de comparaison	**K = 1 éch.** (conformité / ajustement)		- Loi Normale centrée réduite (LNCR)	- Kolmogorov- Smirnov - Chi-2
	K = 2 échs. (égalité / homogénéité)	**Indépendants**	- t-Student - Fisher	- Mann-Whitney - Chi-2
		Appariés	- t-Student	- Wilcoxon
	K > 2 échs. (égalité / homogénéité)	**Indépendants**	- ANOVA	- Kruskal-Wallis - Chi-2
		Appariés	- ANOVA	- Friedman
Tests d’association			- Corrélation de Pearson	- Corrélation de Spearman - Chi-2

S'orienter dans l'univers des tests d'hypothèse

Goal	Dataset		
	Binomial or Discrete	**Continuous measurement (from a normal distribution)**	**Continuous measurement, Rank, or Score (from non-normal distribution)**
Example of data sample	List of patients recovering or not after a treatment	Readings of heart pressure from several patients	Ranking of several treatment efficiency by one expert
Describe one data sample	Proportions	Mean, SD	Median
Compare one data sample to a hypothetical distribution	χ^2 or binomial test	One-sample t test	Sign test or Wilcoxon test
Compare two paired samples	Sign test	Paired t test	Sign test or Wilcoxon test
Compare two unpaired samples	χ^2 square Fisher's exact test	Unpaired t test	Mann-Whitney test
Compare three or more unmatched samples	χ^2 test	One-way ANOVA	Kruskal-Wallis test
Compare three or more matched samples	Cochrane Q test	Repeated-measures ANOVA	Friedman test
Quantify association between two paired samples	Contingency coefficients	Pearson correlation	Spearman correlation

Statistical methods, Delorme A

S'orienter dans l'univers des tests d'hypothèse



Distinction tests paramétriques vs. non paramétriques

- **Tests paramétriques :** applicables si on **connaît** la loi de **distribution** de la **variable** dans la **pop**. Les hypothèses portent sur les paramètres de cette distribution (moyenne, variance…).

Conditions d'utilisation:

- **Indépendance** des observations au sein de chaque échantillon (tirage aléatoire avec remise, ou sans remise dans une population de grande taille)

- **Normalité** de la distribution de la variable mesurée au sein de(s) échantillon(s)

→ Condition dont on pourra s'affranchir si les échantillons sont grands (n> 30 → TCL)

- **Homoscédasticité** = égalité des variances entre échantillons dans le cas de comparaisons de moyennes issues de plusieurs échantillons (ex: test *t* de Student)

Si au moins l'une de ces 3 conditions n'est pas respectée→ tests non paramétriques

Distinction tests paramétriques vs. non paramétriques

➢ **Tests non paramétriques :** Ils ne font **pas d'hypothèse** sur la **distribution** de la **variable**. Ils sont basés sur l'**étude des rangs des observations** issues d'une distribution quelconque.

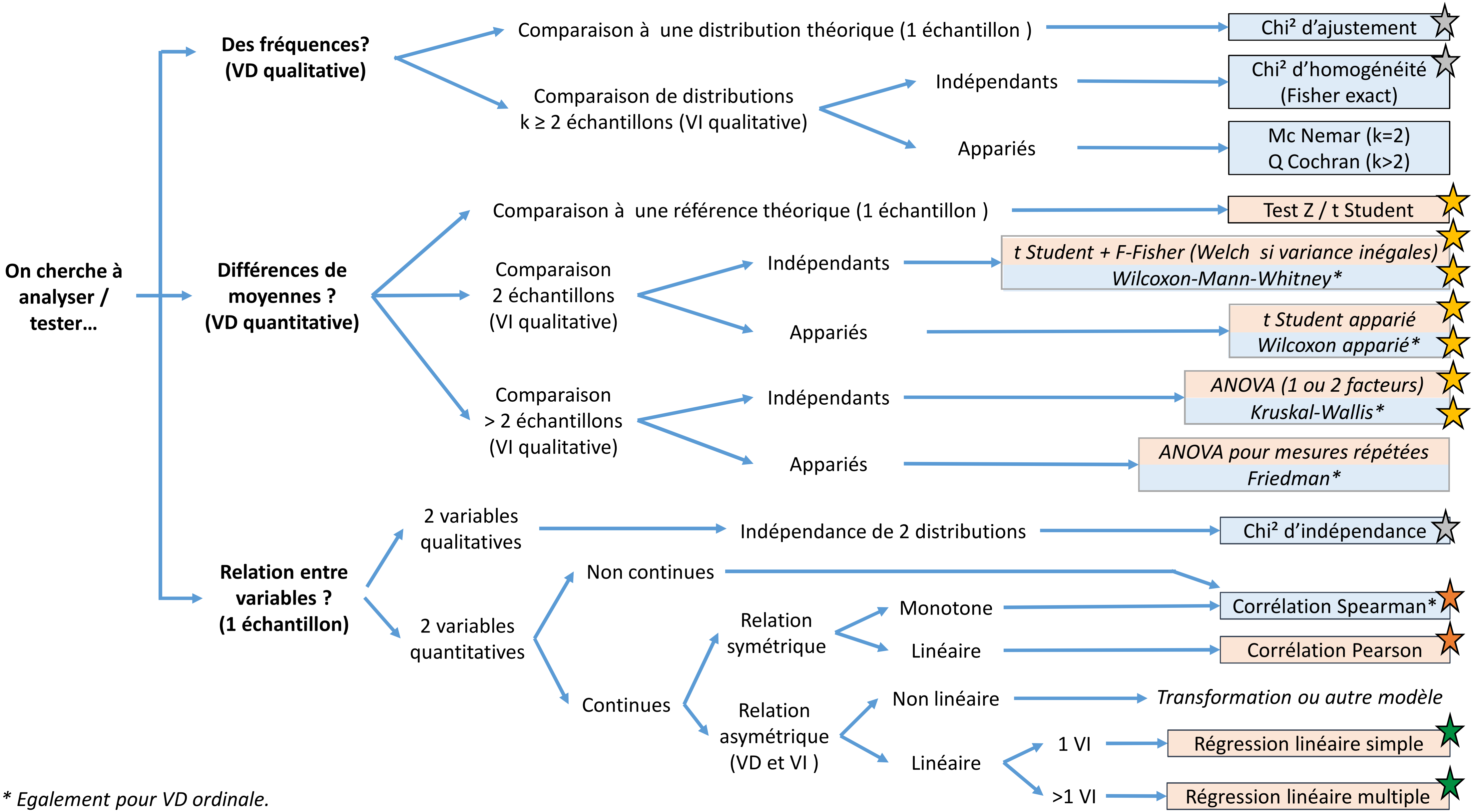
Autres avantages :

- Tests adaptés aux très petits échantillons (ex: $n < 6$)
- Seuls tests permettant de comparer des échantillons issus de populations ayant des distributions différentes
- Seuls tests traitant des données qualitatives

NB :

- Les tests paramétriques, quand leurs conditions sont remplies, sont plus puissants que les tests non paramétriques.
- Si vous voyez une différence significative avec un test non-paramétrique, celle-ci sera encore plus nette avec un test paramétrique.

Plan de la suite du cours…



** Egalement pour VD ordinale.*