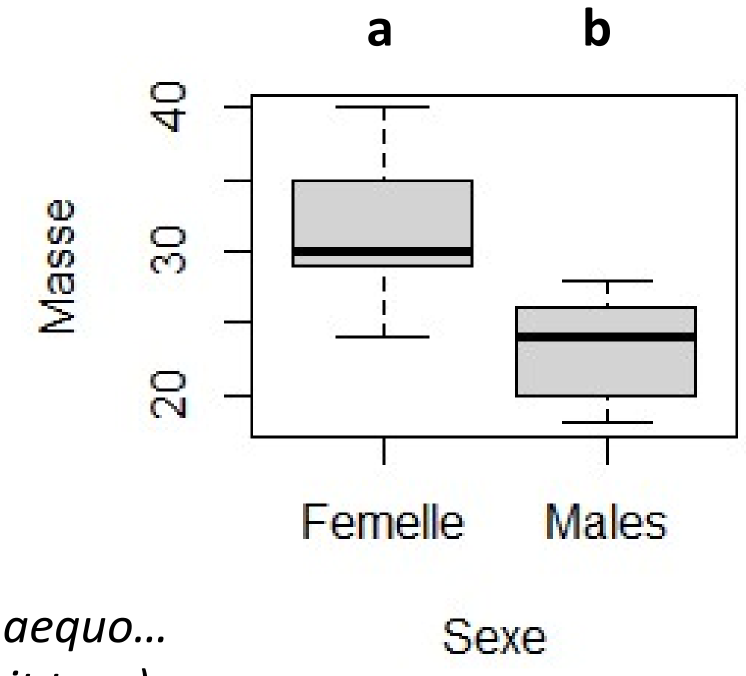
Effectuer le test sous R

Code :

```
boxplot(Masse~Sexe,data=Souris_WMW)

wilcox.test(Masse~Sexe,data=Souris_WMW)
```



Sortie :

R prévient qu'il y a des ex aequo…
(il ne faut pas qu'il y en ait trop)

```
Warning message:
impossible de calculer la p-value exacte avec des ex-aequos

        Wilcoxon rank sum test with continuity correction

data:  Masse by Sexe
W = 32, p-value = 0.02228
alternative hypothesis: true location shift is not equal to 0
```

Effectuer le test sous R

Code :

 # Si on avait eu l'intuition que la masse des F > M et qu'on avait voulu tester cette hypothèse H1 :

```
wilcox.test(Masse~Sexe,data=Souris_WMW, alternative="greater")
```

Ou ''less'' pour H1 : F < M

Rappel : (F=1, M=2)

```
'data.frame':   12 obs. of  2 variables:
 $ Masse: num  24 30 30 38 40 32 28 18 20 28 ...
 $ Sexe : Factor w/ 2 levels "Femelle","Male": 1 1 1 1 1 1 1 2 2 2 ...
```

Sortie :

```
        Wilcoxon rank sum test with continuity correction

data:  Masse by Sexe
W = 32, p-value = 0.01114
alternative hypothesis: true location shift is greater than 0

Warning message:
impossible de calculer la p-value exacte avec des ex-aequos
```

1. Que nous disent ces tests ?

```
shapiro.test(subset(Souris_WMW$Masse,Sexe=="Femelle"))

        Shapiro-Wilk normality test

data:  subset(Souris_WMW$Masse, Sexe == "Femelle")
W = 0.94124, p-value = 0.6499
```

```
shapiro.test(subset(Souris_WMW$Masse,Sexe=="Male"))

        Shapiro-Wilk normality test

data:  subset(Souris_WMW$Masse, Sexe == "Male")
W = 0.95235, p-value = 0.754
```

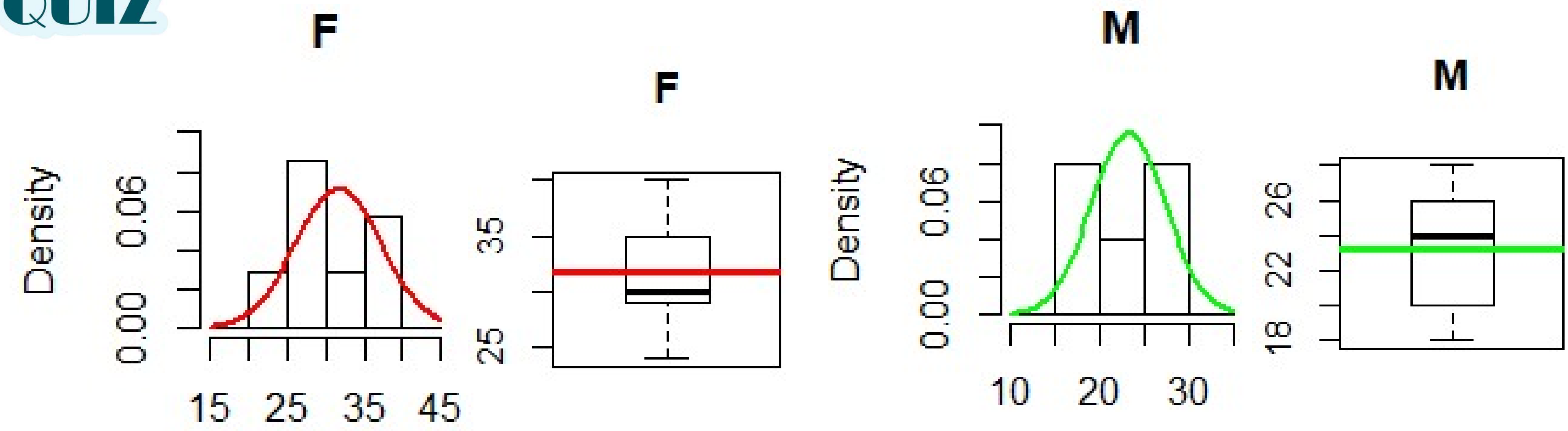
A. L'homoscédasticité est respectée

B. La normalité est respectée ✓ **B** ($p > 0.05$)

C. L'homoscédasticité n'est pas respectée

D. La normalité n'est pas respectée

2. Que nous disent ces graphiques ?



A. L'homoscédasticité est respectée

B. La normalité est respectée

C. L'homoscédasticité n'est pas respectée

D. La normalité n'est pas respectée ✓ D

<u>A retenir</u> : **le test de Shapiro est peu puissant pour les très petits échantillons (n1 et n2 <10)**

→ Tendance à ne pas rejeter l'hypothèse de normalité ! (faire des graphs)

3. Que nous dit ce test ?

```
> var.test(Masse~Sexe,data=Souris_WMW)

        F test to compare two variances

data:  Masse by Sexe
F = 1.8162, num df = 6, denom df = 4, p-value = 0.5866
alternative hypothesis: true ratio of variances is not equal to 1
95 percent confidence interval:
  0.1974673 11.3095729
sample estimates:
ratio of variances
          1.816168
```

A. L'homoscédasticité est respectée

B. La normalité est respectée

✓ **A**

C. L'homoscédasticité n'est pas respectée

D. La normalité n'est pas respectée

QUIZ

4. Peut on faire ce test ?

```
> t.test(Masse~Sexe,data=Souris_WMW, var.equal=T)

        Two Sample t-test

data:  Masse by Sexe
t = 2.8726, df = 10, p-value = 0.01659
alternative hypothesis: true difference in means between
 group Femelle and group Male is not equal to 0
95 percent confidence interval:
  1.910201 15.118370
sample estimates:
mean in group Femelle    mean in group Male
             31.71429              23.20000
```

A. Oui

B. Non

✓ **B** (petits effectifs, distri. non symétrique)

Rappel : Test de Fisher très sensibles à l'hypothèse de Normalité, valide que si :

- Les échantillons sont grands (≥ 30) → pas le cas ici
- Au moins 1 des échantillons est petit (<30) mais de distribution Normale → pas le cas ici

5. Qu'aurions nous conclu ?

```
> t.test(Masse~Sexe,data=Souris_WMW, var.equal=T)

        Two Sample t-test

data:  Masse by Sexe
t = 2.8726, df = 10, p-value = 0.01659
alternative hypothesis: true difference in means between
 group Femelle and group Male is not equal to 0
95 percent confidence interval:
  1.910201 15.118370
sample estimates:
mean in group Femelle    mean in group Male
             31.71429              23.20000
```

A. Différence non significative

B. Différence significative

✓ **B** (p< 0.05)

```
        Wilcoxon rank sum test

data:  Femelles and Males
W = 32, p-value = 0.02228
```

***A retenir* : On n'a rien perdu à faire un test non-paramétrique (même si moins puissant)!**

Comparaison deux échantillons indépendants – Non paramétrique

2.1.2.1. Test de Mann-Whitney : Cas des grands échantillons (n_1 et n_2 > 20)

Les premières étapes restent les mêmes que pour les petits échantillons.

Pour chez vous + voir vidéo

- La différence étant qu'ici, la variable U approche une loi Normale,

- de moyenne $\mu_U = \frac{n_1 \times n_2}{2}$

- d'écart type $\sigma_U = \sqrt{\frac{n_1 \times n_2 \times (n_1 + n_2 + 1)}{12}}$

- On calculera $Z_{WMW} = \frac{U_{obs} - \mu_U}{\sigma_U}$

- Puis on comparera $|Z_{WMW}|$ aux valeurs remarquables de la loi Normale (seuil α)

Règle de décision :

Si $|Z_{WMW}| \geq Z_{théo}$ on rejette H_0 et accepte H_1

***NB:* R fait cette correction automatiquement et vous en renvoie la ccl.**

Plan du cours

Partie 4. Les tests sur les différences de moyennes

1. Test de conformité : moyenne observée vs théorique

2. Test d'homogénéité : Comparer les moyennes de plusieurs échantillons

2.1. Comparaison de deux échantillons indépendants

2.1.1. Test paramétrique : t de Student (Welch)

(Comparaison de variances : test F de Fisher)

2.1.2. Test non paramétrique : Wilcoxon -Mann-Whitney

2.3. Comparaison de deux échantillons appariés

2.3.1. Test paramétrique : t de Student apparié

2.3.2. Test non paramétrique : Wilcoxon apparié

2.4. Comparaison de trois échantillons ou plus

2.4.1. Test paramétrique : ANOVA 1 facteur

2.4.2. Test non paramétrique : Kruskal-Wallis

Comparaison deux échantillons appariés - Paramétrique

Objectif : Comparer les moyennes de 2 échantillons dont les observations sont associées par paires (appariées = non indépendantes).

Rappel :

- La *ième* observation du 1er éch. est associée à la *ième* observation du 2nd éch. (lien)
- Les deux échantillons sont nécessairement de la même taille ($n_1 = n_2$)

Exemples : les individus sont mesurés 2 fois …

- Par 2 opérateurs ≠ dans les mêmes conditions de traitement *(effet observateur)*
- À 2 instants ≠ t_1 et t_2 pour étudier l'effet d'un traitement *(effet temporel)*
- Toutes données suggérant un appariement; comparaisons biométriques, proximité spatiale…

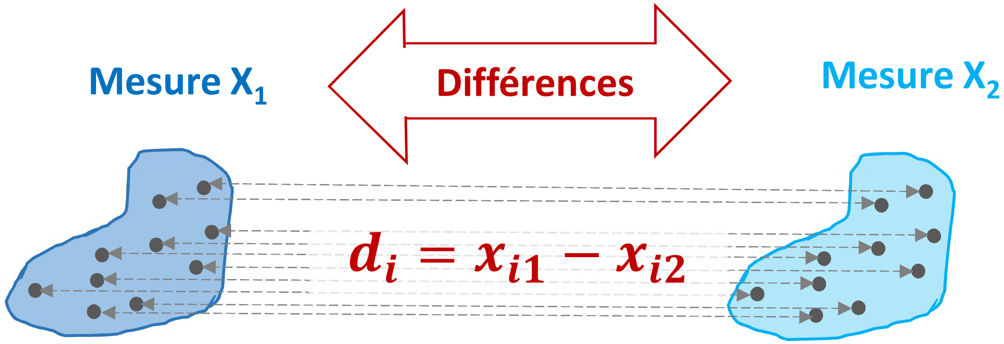
NB : Test + puissant que celui sur échantillons indépendants (détection fine des effets car chaque indiv est son propre contrôle), et - contraignant en terme d'échantillonnage (ex : quand même indivs passent par toutes conditions expérimentales).

Comparaison deux échantillons appariés - Paramétrique

Les données : On mesure 1 VA quantitative X (VD) sur 2 échantillons (VI à 2 modalités) de n individus dont les observations sont associées par paires (appariées = <u>non indépendantes</u>).

Principe :

- Comparer la moyenne de la VD entre les 2 échantillons en se basant sur l'analyse des **différences** observées pour chacune des **n paires** d'observations → nouvelle VA : d_i



	ind_1	ind_2	Ind_i	ind_n
X_1	$x_{1,1}$		$x_{1,i}$	$x_{1,n}$
X_2	$x_{2,1}$		$x_{2,i}$	$x_{2,n}$
Différence	d_1	d_2	d_i	d_n

→ $\bar{d}$

- On compare ensuite la moyenne des différences $\bar{d}$ à une moyenne théorique = 0 sous H_0.

Comparaison deux échantillons appariés - Paramétrique

Les hypothèses :

$\mathbf{H_0}: |\bar{d}| = |\overline{x_1} - \overline{x_2}| = 0$ → les différences observées sont du au hasard

$\mathbf{H_1}: |\bar{d}| = |\overline{x_1} - \overline{x_2}| \neq 0$ (ou >, ou <) → les différences sont significatives

La statistique de test : t de Student pour échantillons appariés = écart réduit.

$$\mathbf{T} = \frac{\boldsymbol{\bar{d}}}{\boldsymbol{S(d)/\sqrt{N}}}$$

Moyenne estimée des différences di

Erreur standard estimée de la moyenne des différences.

Conditions d'application: Les différences $d_i = X_{i1} - X_{i2}$ suivent une loi normale.

Comparaison deux échantillons appariés - Paramétrique

La méthode :

1. Calculer les **différences** de valeurs pour chaque couple d'observation : $\boldsymbol{d_i = x_{i1} - x_{i2}}$

2. Calculer la **moyenne des d_i** : $\boldsymbol{\bar{d} = \frac{\sum d_i}{n}}$

3. Calculer l'estimation de la **variance** de *d* : $\boldsymbol{S^{*2}(d) = \frac{\sum (d_i - \bar{d})^2}{n-1}}$

4. Calcul de la statistique de test : $\boldsymbol{T_{obs} = \frac{\bar{d}}{S(d)/\sqrt{N}}}$

5. Comparer |T_{obs}| aux valeurs remarquables ($Z_{théo}$) de la **loi Normale si N ≥ 30**,

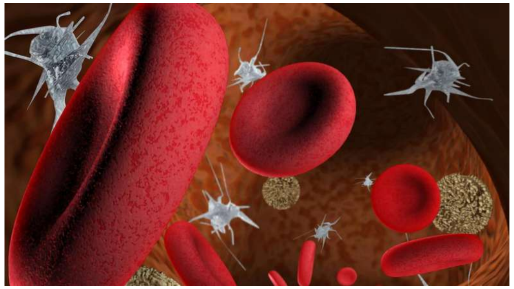
ou aux valeurs de la table de **Student** ($T_{théo}$) à **n-1** degré de liberté **si N < 30**

Règle de décision :

Cas bilatéral : Si |T_{obs}| > à la **valeur théorique**, alors on rejette H_0 et on accepte H_1

Comparaison deux échantillons appariés - Paramétrique

Application :



On a mesuré la capacité de fixation en fer de la transferrine chez 12 patients à partir de prises de sang réalisées en mai et décembre 2020.

Les résultats sont donnés dans le tableau suivant (en mg/dl) :

patient	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Mai	380	250	160	400	210	150	370	250	230	170	190	380
Décembre	360	290	210	350	200	170	370	240	280	300	160	400

Y a-t-il une différence statistique de la capacité de fixation entre ces 2 dates ?

→ *Voir la réalisation du test « à la main » en vidéo sur Moodle* ←

Importer un jeu de données sous R

1. **Télécharger** le data frame «transfer» (Moodle, format csv2 –français- : sep= ";", dec=",")
   dans votre **répertoire de travail R.**

2. **L'importer** sous R (rappeler **chemin d'accès** à répertoire si besoin) :

```
transfer<-read.table("transfer.csv", sep=";", dec = ",",header = T)
View(transfer)
str(transfer)
transfer$Mois<-as.factor(transfer$Mois)
str(transfer)
```

```
'data.frame':	24 obs. of  3 variables:
 $ ID    : chr  "ind1" "ind2" "ind3" "ind4" ...
 $ Mois  : Factor w/ 2 levels "Dec","Mai": 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 ...
 $ Mesure: int  380 250 160 400 210 150 370 250 230 170 ...
```

	ID	Mois	Mesure
1	ind1	Mai	380
2	ind2	Mai	250
3	ind3	Mai	160
4	ind4	Mai	400
5	ind5	Mai	210
6	ind6	Mai	150
7	ind7	Mai	370
8	ind8	Mai	250
9	ind9	Mai	230
10	ind10	Mai	170
11	ind11	Mai	190
12	ind12	Mai	380
13	ind1	Dec	360
14	ind2	Dec	290
15	ind3	Dec	210
16	ind4	Dec	350
17	ind5	Dec	200
18	ind6	Dec	170
19	ind7	Dec	370
20	ind8	Dec	240
21	ind9	Dec	280
22	ind10	Dec	300
23	ind11	Dec	160
24	ind12	Dec	400

Effectuer le test sous R

Code :

```
decembre<-subset(transfer$Mesure,transfer$Mois=="Dec")
mai<-subset(transfer$Mesure,transfer$Mois=="Mai")
```

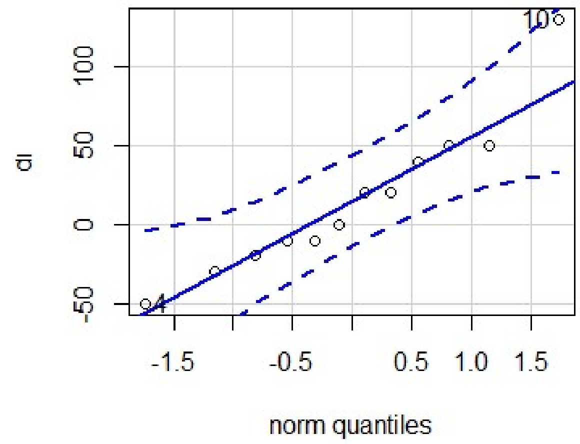
Sorties :

```
di<-decembre-mai
```

```
> di
 [1] -20  40  50 -50 -10  20   0 -10  50 130 -30  20
```

Vérification de la normalité des di :

```
qqPlot(di)
```




```
shapiro.test(di)
```

```
        Shapiro-Wilk normality test

data:  di
W = 0.92417, p-value = 0.3224
```

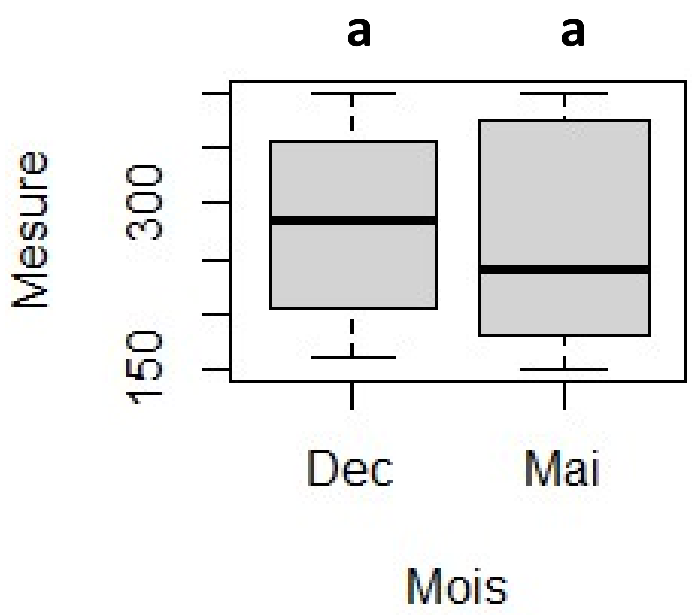
Effectuer le test sous R

Permet de préciser que les échantillons sont appariés

Code :
```
t.test(decembre,mai, paired = T)
```

Ou
```
t.test(Mesure~Mois,data=transfer,paired=T)
```

```
boxplot(Mesure~Mois,data=transfer)
```



Sortie :
```
	Paired t-test

data:  decembre and mai
t = 1.1439, df = 11, p-value = 0.277
alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 -14.63291  46.29957
sample estimates:
mean of the differences
               15.83333
```

NB: si l'IC inclus « 0 », le test est non significatif

Plan du cours

Partie 4. Les tests sur les différences de moyennes

Comparaison deux échantillons appariés – Non paramétrique

Les données : On mesure 1 VA quantitative ou qualitative ordinale X (VD) sur les n individus de 2 échantillons (VI à 2 modalités) appariés (= dont les observations sont associées par paires).

→ On utilise ce test quand les di n'ont pas une distribution normale (~~test param~~).

Principe :

On va également calculer les différences entre **paires** d'observations d_i, mais on va ici s'intéresser à leurs rangs et leur signe (+/-).

La statistique de test :

$$T_W = min\,(\,T_+\,,\,T\text{-}\,)$$

La statistique de test portera sur la **somme des rangs** pour les **di <u>non nulles</u>** de signe <u>positif</u> (T_+) ou de signe <u>négatif</u> (T_-).

Le test vise à évaluer **à quel point le T_{W_obs} dévie** de la valeur ***n(n + 1)/4*** attendue sous H_0.

Comparaison deux échantillons appariés – Non paramétrique

Les hypothèses :

H_0 : La somme des rangs positifs **(T_+)** = somme des rangs négatifs **(T-)**

H_1 : (Bilatéral) La somme des rangs **(T_+)** ≠ **(T_-)**

La méthode:

1. Calculer les di
2. Attribuer un **rang** aux |di| <u>non nulles</u> (rang moyen en cas d'ex aequo)
3. Noter le **signe** des di (*i.e.* positif ou négatif)
4. Effectuer la **somme des rangs** pour les **di** de signe **positif** (**T_+**)
   idem pour les di de signe **négatif** (**T_-**)
5. Le T_{W_obs} correspondra à la plus **petite valeur** parmi **T_+** et **T_-**

   Propriété : **T_+** + **T_-** = n(n+1)/2 ; avec n : effectif des « d_i » <u>non nulles</u>

6. La suite dépend de l'effectif de l'échantillon…

Comparaison deux échantillons appariés – Non paramétrique

2.3.2.1. Cas des petits échantillons ($n \leq 25$)

On compare le T_{w_obs} (min de T_+ et T_-) au $T_{w\_théo}$ de la table Wilcoxon pr échantillons appariés.

→ Dans le poly: 1 seule table pour test en bilatéral ou unilatéral, directement utilisable pour $\alpha = 0.05$ ou 0.01, avec « n » = nombre de di non nulles.

TABLE DE WILCOXON POUR ECHANTILLONS APPARIÉS

Valeurs critiques à comparer avec les valeurs observée à partir de vos 2 échantillons appariés de taille *n* pour un test **unilatéral (one-tailed test)** ou **bilatéral (two-tailed test)** aux seuils α = **0.05** ou **0.01**.

Règle de décision :

Pour un test bilatéral :

Si $T_{w\_obs} \leq T_{w\_theo}$

➔ On rejette H_0 et accepte H_1.

Nb de di ≠ 0

n	Two-Tailed Test		One-Tailed Test	
	$\alpha = .05$	$\alpha = .01$	$\alpha = .05$	$\alpha = .01$
5	—	—	0	—
6	0	—	2	—
7	2	—	3	0
8	3	0	5	1

Comparaison deux échantillons appariés – Non paramétrique

Pour chez vous
+ voir vidéo

Règle de décision :

Pour un test unilatéral :

- Si H_1 : ***Ech.1*** **<** ***ech.2***, et que di = ech.1 - ech.2**,** on s'attend à ce que **T- > T+**
  On prendra $\mathbf{T_{w\_obs}} = \mathbf{T+}$ (T dont on s'attend a ce qu'il soit le plus petit)

- Si H_1 : ***Ech.1*** **>** ***ech.2***, on s'attend à ce que **T+ > T-**
  On prendra $\mathbf{T_{w\_obs}} = \mathbf{T-}$

➔ Dans tous les cas, si $\mathbf{T_{w\_obs}} \leq \mathbf{T_{w\_theo}}$: rejet de H_0 au profit de H_1(idem test bilatéral).

Comparaison deux échantillons appariés – Non paramétrique

2.3.2.2. Cas des grands échantillons (n > 25)

Pour chez vous + voir vidéo

Dans ce cas, la statistique de test T_w approche une loi Normale

de moyenne $\mu_{TW} = \frac{n(n+1)}{4}$

et d'écart type $\sigma_{TW} = \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{24}}$

On procède à un centrage-réduction : $Z_{TW} = \frac{|T_{wobs} - \mu_{TW}|}{\sigma_{TW}}$

On compare ensuite Z_{TW} aux valeurs critiques de la loi Normale CR (n°2)

Règle de décision : (cas bilatéral) Si $|Z_{Tw}| \geq |Z_{théo}|$ ➔ On rejette H_0 et on accepte H_1

***NB:* R fait cette correction automatiquement et vous en renvoie la ccl.**

Comparaison deux échantillons appariés – Non paramétrique

Application :

12 sujets sont entraînés à la réalisation d'une tâche. L'épreuve permettant de mesurer leur efficacité apporte les résultats suivant :

sujets	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
Av Ent	15	20	2	42	3	10	29	20	30	45	60	19
Ap Ent	45	60	20	45	24	17	28	57	58	47	56	38

Y a-t-il une différence d'efficacité avant et après entraînement ? (test bilatéral)

Peut-on conclure à l'efficacité de l'entraînement ? (On doit faire un test unilatéral)

→ Voir la réalisation du test « à la main » en vidéo sur Moodle ←

Importer un jeu de données sous R

1. **Télécharger** le data frame «training» (Moodle, format csv2 –français- : sep= ";", dec=",")

   dans votre **répertoire de travail R.**

2. **L'importer** sous R (rappeler **chemin d'accès** à répertoire si besoin) :

```
training<-read.table("training.csv", sep=";", dec = ",",header = T)

View(training)

str(training)

training$Date<-as.factor(training$Date)
str(training)

'data.frame':	24 obs. of  3 variables:
 $ ID    : chr  "ind1" "ind2" "ind3" "ind4" ...
 $ Date  : Factor w/ 2 levels "apres","avant": 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 ...
 $ Mesure: int  15 20 2 42 3 10 29 20 30 45 ...
```

	ID	Date	Mesure
1	ind1	avant	15
2	ind2	avant	20
3	ind3	avant	2
4	ind4	avant	42
5	ind5	avant	3
6	ind6	avant	10
7	ind7	avant	29
8	ind8	avant	20
9	ind9	avant	30
10	ind10	avant	45
11	ind11	avant	60
12	ind12	avant	19
13	ind1	apres	45
14	ind2	apres	60
15	ind3	apres	20
16	ind4	apres	45
17	ind5	apres	24
18	ind6	apres	17
19	ind7	apres	28
20	ind8	apres	57

Effectuer le test sous R

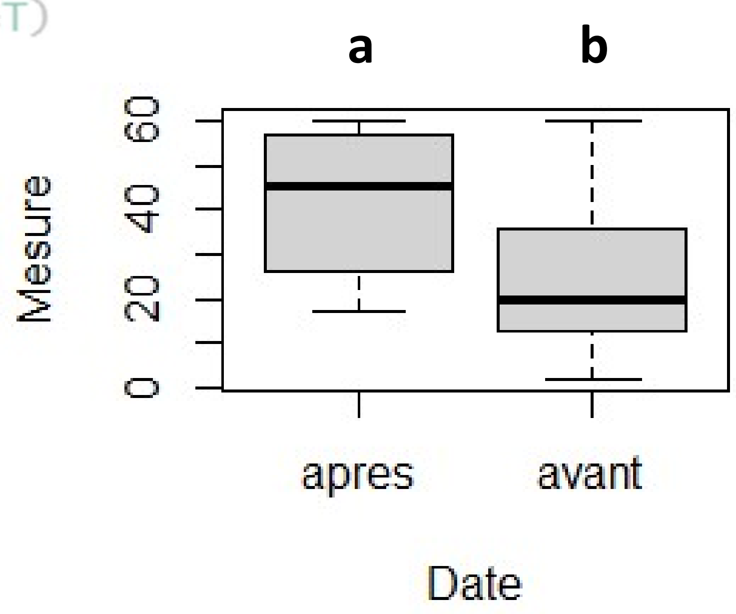
Code :

```
av<-subset(training$Mesure,training$Date=="avant")
ap<-subset(training$Mesure,training$Date=="apres")
```

```
wilcox.test(av,ap,paired=TRUE) #alternative ="two.sided" par défaut
```

Ou
```
wilcox.test(Mesure~Date,data=training,paired=T)
```

```
boxplot(Mesure~Date,data=training)
```



Sortie :

```
Wilcoxon signed rank test

data:  av and ap
V = 5, p-value = 0.004883
alternative hypothesis: true location shift is not equal to 0
```

Effectuer le test sous R

Code :

```
wilcox.test(av,ap,paired=TRUE, alternative ="less") # sinon "greater"
```

Sortie :

```
        Wilcoxon signed rank test

data:  av and ap
V = 5, p-value = 0.002441
alternative hypothesis: true location shift is less than 0
```