

Devoir numéro 3 de Licence 2 Informatique

Module : algorithmique des graphes

Il vous est demandé un travail personnel. Toute réponse non justifiée sera considérée comme fausse. En clair, nous voulons une réponse et l'explication qui conduit à formuler cette réponse. Pour les algorithmes il sera attendu, un exposé des idées qui préside au code, le code de l'algorithme, une preuve de validité et de complexité.

Exercice 1

Un graphe $G=(X,U)$ modélise un réseau de communication. Nous associons à chaque arc (a,b) de notre réseau une pondération $v(ab)$.

La pondération $v(xy)$ correspond à la probabilité pour qu'un message transitant par l'arc xy ne soit pas espionnée.

Dans cet exercice nous allons étudier le problème suivant :

Nom du problème : Chemin sûr

Données du problème :

$G = (X, U, V)$ Un graphe pondéré

s, p deux sommets de G

Question du problème :

Trouvez un chemin de s à p permettant l'acheminement de l'information de s à p en minimisant le risque d'écoute ?

Rappel : Soit A et B deux événements indépendants de probabilité respective p_A et p_B , la probabilité pour que les deux événements A et B se produisent est de $p_A \times p_B$ (p_A que multiplie p_B). On souhaite transformer le graphe G en un graphe G' de telle sorte qu'il soit possible d'utiliser un algorithme du cours sur G' pour résoudre le problème Chemin sûr.

1.1 Quel algorithme du cours allez-vous utiliser ?

1.2 Ecrivez l'algorithme qui construit ce graphe G' à partir de G .

1.3 Démontrez la validité de votre transformation et de votre algorithme.

1.4 Quelle est la complexité de votre algorithme.

1.5 En déduire un algorithme permettant de résoudre le problème Chemin sûr. Vous donnerez la complexité de cet algorithme.

Exercice 2

Suite à une attaque les messages transitant par les nœuds (ou sommets) du réseau ont une probabilité non nulle d'être écoutés. Le tableau PE donne pour chaque nœud du réseau t , la probabilité $PE[t]$ pour qu'un message transitant par le nœud t soit écouté.

2.1 Comment modifier le graphe G en un graphe GT tenant compte de cette nouvelle contrainte ?

2.2 Ecrivez l'algorithme qui construit ce graphe GT à partir de G et PE .

2.3 Démontrez la validité de votre transformation et de votre algorithme.

2.4 Quelle est la complexité de votre algorithme.

Nom du problème : Chemin sûr 2

Données du problème :

$G = (X, U, V)$ Un graphe pondéré

$PE =$ Un tableau de réels indicé par X

s, p deux sommets de G

Question du problème :

Trouvez un chemin de s à p permettant l'acheminement de l'information de s à p en minimisant le risque d'écoute ?

2.5 En déduire un algorithme permettant de résoudre le problème Chemin sûr. Vous donnerez la complexité de cet algorithme.

Exercice 3

On souhaite organiser la gestion des ressources affectées au projet Niture.

Pour être mené à bien le projet Niture a été décomposé en un ensemble T de 4 tâches indépendantes :

$T = \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$

La réalisation de chacune de ces tâches mobilise des unités de travail dans des compétences choisies parmi l'ensemble de compétences :

$C = \{c_1, c_2, c_3\}$

Pour réaliser ces tâches vous disposez d'un ensemble de 4 Robots :

$R = \{r_1, r_2, r_3, r_4\}$

Dans le tableau CompRob, on dispose de l'information si oui ou non la compétence i est possédée par le robot j :

CompRob	r1	r2	r3	r4
c1	Oui	Oui	Non	Non
c2	Oui	Oui	Oui	Non
c3	Non	Non	Oui	Oui

Par exemple le robot r2 possède les deux compétences c1 et c2 mais pas la compétence c3.

Ces robots sont mis à votre disposition pour les durées suivantes

	r1	r2	r3	r4
DurDispo	5	5	12	6

Ce tableau DurDispo exprime la durée maximale (en unité de temps) pendant laquelle le robot est à votre disposition. Par exemple vos disposerez du robot r3 pour 12 unités de temps au maximum.

En une unité de temps, un robot peut fournir une unité de travail dans l'une des compétences dont il dispose (attention sur une autre unité de temps notre robot peut changer de compétence).

Pour réaliser une tâche, Il faut être capable de mobiliser des unités de travail dans une ou plusieurs compétences. Le tableau TabRes donne la quantité de travail nécessaire dans chaque compétence pour réaliser une tâche donnée.

TabRes	t1	t2	t3	t4
c1	2	1	0	0
c2	1	4	4	5
c3	0	0	3	6

Ainsi pour effectuer la totalité de la tâche t4 nous avons besoin de 5 unités de travail de la compétence c2 et de 6 unités de travail de la compétence c3.

Pour boucler le projet Niture, vous devez être capable de réaliser toutes les tâches avec les seules ressources qui vous ont été attribuées.

3.1 Modélisez le problème sous la forme d'un graphe de flots

3.2 A quelle condition sur le graphe de flot (cf. question 1), est-il possible de réaliser le projet Niture dans son intégralité.

3.3 Quel est le flot maximal du graphe que vous avez donné à la question 1 ?

Pour justifier votre réponse vous montrerez une trace de l'exécution de l'algorithme.

3.4 Pouvez-vous compléter le projet Niture avec les ressources offertes. Si oui donnez la durée de disponibilité minimale de chacun des robots (économies). Sinon indiquez les ressources manquantes et les durées de disponibilités pour chaque robot nécessaire pour les obtenir.